

"Классическая дифференциальная геометрия"
2004/05 уч.год, весенний семестр, 202 и 203 группы

20.04 Примеры многообразий, группы преобразований.

Любой геометрический объект можно описать на языке топологии. Однако, общая топология - это хороший язык для изучения непрерывных отображений. Если же мы захотим построить некий "математический анализ на поверхностях", т.е. в частности определить дифференцирование функций, то нам будет необходимо уметь "складывать близкие точки поверхности" (вспомните определение производной). А на топологических пространствах, вообще говоря, никакого сложения близких точек не определено. Поэтому, понятие топологического пространства является слишком общим для этих целей.

Итак, чтобы построить аналог классического (= в $\mathbb{R}^n$) математического анализа на "поверхностях", нам необходимо снабдить топологическое пространство дополнительной структурой. Именно на этом пути возникает одно из важнейших понятий геометрии, топологии и математической физики - понятие гладкого многообразия. Элементарная теория гладких многообразий была создана американским математиком Хаслером Уитни (примерно в середине 1930-х годов).

Напомним формальное определение многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *n -мерным гладким многообразием* называется хаусдорфово топологическое пространство, покрытое не более чем счетным числом открытых множеств $U_1, U_2, \dots$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\forall U_i \exists$ гомеоморфизм $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- 2) Если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то гомеоморфизм $\psi_{ij} = \varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ является гладким (т.е. класса C^∞) отображением областей евклидовых пространств (нарисуйте рисунок!).¹

¹Говорят также, что покрытие $\{U_i\}$ и гомеоморфизмы ϕ_i задают гладкую структуру на топологическом пространстве.

Следует иметь в виду, что гладкое многообразие - это не просто хаусдорфово пространство, допускающее такое покрытие с такими гомеоморфизмами, а хаусдорфово пространство *вместе* с таким покрытием и такими гомеоморфизмами. Ради краткости покрытие $\{U_i\}$ и набор гомеоморфизмов $\{\phi_i\}$ (удовлетворяющих приведенным условиям) часто называют *атласом*, а пару (U_i, ϕ_i) - *картой*.

Возникает вопрос: когда одно и то же топологическое пространство с двумя различными атласами следует считать одним и тем же гладким многообразием (т.е. когда эти атласы определяют одну и ту же гладкую структуру), а когда - нет? Следующее соображение подсказывает ответ.

Роль карты (U_i, ϕ_i) состоит в том, что при помощи гомеоморфизма φ_i вводится

Ближайшая наша цель запастись большим количеством примеров многообразий.

1. $\mathbb{R}^n$ - евклидово пространство. Действительно, за открытое покрытие можно взять покрытие, состоящее из одного множества $U_1 = \mathbb{R}^n$, а за φ_1 - тождественное отображение.

2. Поверхности в евклидовых пространствах (в частности сфера S^n). Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко "*Современная геометрия*", том 2, стр. 13.

3. $\mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$ - проективные пространства. Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко "*Современная геометрия*", том 2, стр. 17.

Важный пример многообразий, задаваемых системой уравнений в евклидовом пространстве, - это групповые многообразия.

a. $GL(n, \mathbb{R}) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) | \det X \neq 0\}$ - группа невырожденных вещественных матриц (полная линейная группа).

b. $SL(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) | \det X = 1\}$ - специальная линейная группа

c. $O(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) | XX^T = 1\}$ - группа ортогональных матриц.

d. $SO(n, \mathbb{R}) = \{X \in SL(n, \mathbb{R}) | XX^T = 1\}$ - группа специальных ортогональных матриц.

e. $U(n, \mathbb{R}) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) | X\bar{X}^T = 1\}$ - группа унитарных матриц.

f. $SU(n, \mathbb{R}) = \{X \in U(n, \mathbb{R}) | \det X = 1\}$ - группа специальных унитарных матриц.

некоторая система координат в открытом множестве U_i : если $x \in U_i$, то $\varphi_i(x)$ - это точка евклидова пространства, т.е. набор чисел; их мы и принимаем за координаты точки x . Условие 2) означает, что карты одного и того же атласа согласуются друг с другом в том смысле, что координаты точки x в карте (U_i, φ_i) являются гладкими функциями координат той же точки в карте (U_j, φ_j) . Но мы можем и для карт разных атласов говорить об их согласованности (или несогласованности) в том же самом смысле. Эти соображения мотивируют следующее определение.

Два разных атласа $\{(U_i, \varphi_i)\}$ и $\{(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)\}$, заданные на одном и том же топологическом пространстве, называются *согласованными* друг с другом, если совокупность всех карт обоих атласов снова образует атлас. По определению считают, что два атласа тогда и только тогда задают одну и ту же гладкую структуру, когда они согласованы.

В определении многообразия от отображений ψ_{ij} (иногда их называют отображениями склейки) можно потребовать гладкости класса C^n ; тогда мы получим определение *дифференцируемого многообразия класса C^n* . В топологии существенным является только различие между C^0 и всеми остальными $C^n, 1 \leq n \leq \infty$: можно доказать, что на многообразии класса $C^n, n \geq 1$, существует атлас, превращающий его в многообразие класса C^∞ и C^n -эквивалентный исходному атласу. В то же время существуют примеры многообразий класса C^0 (топологических многообразий) размерности $n > 10$, на которых нельзя ввести структуру гладкого многообразия.

Задача 1. Доказать, что группа $GL(n, \mathbb{R})$ является многообразием.

Решение. Множество всех матриц $n \times n$ вложено в пространство $\mathbb{R}^{n^2}$, поскольку любую матрицу можно записать в строку длины n^2 . Условие $\det X \neq 0$ задает в пространстве всех матриц область. Так как если определитель некоторой матрицы X не равен нулю, то и определители всех достаточно близких к X матриц тоже не равны нулю, то вместе с каждой точкой пространство $GL(n, \mathbb{R})$ содержит некоторую окрестность. Таким образом, полная линейная группа является областью в $\mathbb{R}^{n^2}$, а следовательно и многообразием. $\square$

Для доказательства того, что то или иное подмножество евклидова пространства является многообразием часто используют *теорему о неявной функции*.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $x^1, \dots, x^n$ множество $X \subset \mathbb{R}^n$, состоящее из точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ \dots \\ f_s(x^1, \dots, x^n) = 0. \end{cases}$$

Матрица $J_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} \Big|_x \right) \in M(s, n)$ называется *матрицей Якоби* этой системы, а ее определитель (если он определен) *якобианом*.

ТЕОРЕМА. Если ранг $\text{rk } J_x = k$ всюду на X , то множество X является гладким многообразием размерности $(n - k)$.

Как считать ранг матрицы Якоби? С системой уравнений связано отображение $F : \mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n) \rightarrow \mathbb{R}^s(y^1, \dots, y^s)$

$$F(x^1, \dots, x^n) = (y^1, \dots, y^s),$$

$$y^i = f_i(x^1, \dots, x^n)$$

$$X = F^{-1}(0)$$

Для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ определен дифференциал $d_{x_0}F$ отображения F в этой точке: $d_{x_0}F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$, который вектор $a = (a^1, \dots, a^n)$ отображает в вектор $b = (b^1, \dots, b^s)$ по формуле

$$b^i = (d_{x_0}F(a))^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \Big|_{x_0} a^j = (J_{x_0}a)^i$$

Это, очевидно, линейное отображение. Утверждается, что $\text{rk } J_{x_0} = \dim \text{Im } d_{x_0}F$ (это вытекает из соответствующих определений).

Приведем удобный способ вычисления дифференциала (этот прием часто используется и в других задачах). Чтобы вычислить $d_{x_0}F(a)$, рассмотрим кривую $\gamma(t)$ в $\mathbb{R}^n$, проходящую через x_0 и имеющую в x_0 касательный вектор a (нарисуйте рисунок!). То есть

$$\gamma(0) = x_0, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t) = a$$

Тогда (техническая проверка)

$$d_{x_0}F(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t))$$

Задача 2. Доказать, что группа $O(n, \mathbb{R})$ является гладким многообразием и найти ее размерность.

Решение. Группа $O(n, \mathbb{R})$ вложена в пространство $\mathbb{R}^{n^2}$. Соотношение $XX^T = 1$ дает n^2 уравнений. Чтобы доказать, что группа ортогональных матриц является многообразием подсчитаем ранг матрицы Якоби этой системы уравнений. Для этого, согласно описанной выше конструкции, определим отображение $F : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ по формуле $F(X) = XX^T - 1$. Ясно, что $O(n, \mathbb{R}) = F^{-1}(0)$. Вычислим дифференциал $d_{X_0}F : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ в точке $X_0 \in O(n, \mathbb{R})$. Для этого рассмотрим кривую $\gamma(t)$ в $\mathbb{R}^{n^2}$, такую, что $\gamma(0) = X_0$ и $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t) = X$ - некоторая матрица. Тогда имеем

$$A := d_{X_0}F(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\gamma(t)\gamma(t)^T - 1] = X X_0^T + X_0 X^T$$

Очевидно, что A - симметрическая матрица. Это означает, что $\text{Im } d_{X_0}F$ принадлежит множеству симметрических матриц. С другой стороны, для любой симметрической матрицы A , можно найти матрицу X , такую, что $A = X X_0^T + X_0 X^T$, где $X_0 \in O(n, \mathbb{R})$. Для этого достаточно положить $X = (1/2)AX_0$.

Таким образом, образ $\text{Im } d_{X_0}F$ отображения $d_{X_0}F$ совпадает с пространством симметрических матриц. Следовательно, ранг матрицы Якоби системы, описывающей группу $O(n, \mathbb{R})$, постоянен, т.е. $O(n, \mathbb{R})$ - гладкое многообразие.

Вычислим размерность этого многообразия.

Имеем $\text{rk } J_{X_0} = \dim \text{Im } d_{X_0}F = \dim \{\text{симметрические матрицы}\} = (1/2)n(n+1)$. Поэтому $\dim O(n, \mathbb{R}) = n^2 - (1/2)n(n+1) = (1/2)n(n-1)$. $\square$

В таком же духе можно доказать, что все приведенные выше группы являются многообразиями.²

Задача 3. Описать касательное пространство к $SL(n, \mathbb{R})$ в единице.

Решение. Пусть $X(t)$ гладкая кривая, лежащая в группе $SL(n, \mathbb{R})$ и проходящая через единицу: $X(0) = 1$. Тогда касательный вектор к этой кривой в единице принадлежит касательному пространству: $A := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X(t) \in T_e SL(n, \mathbb{R})$. Так как кривая лежит в группе унимодулярных матриц, то $\det X(t) = 1$. Дифференцируя это равенство получим:

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det X(t) = \text{Tr} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X(t) = \text{Tr} A$$

Таким образом наше касательное пространство лежит в пространстве матриц с нулевым следом. Докажем, что оно с ним совпадает. Для этого необходимо для произвольной матрицы A такой, что $\text{Tr} A = 0$ построить кривую $X(t)$ в группе $SL(n, \mathbb{R})$, проходящую через единицу так, чтобы A был касательным вектором к этой кривой в единице. В качестве такой кривой возьмем $X(t) = \exp(tA)$. Действительно, $X(0) = 1$ и $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X(t) = A$. Остается показать, что кривая лежит в группе. Воспользуемся известным из линейной алгебры равенством

$$\det \exp(tA) = \exp \text{Tr}(tA)$$

Отсюда следует, что $\det X(t) = 1$.

Итак, касательное пространство к группе унимодулярных матриц совпадает с пространством матриц с нулевым следом. $\square$

Задача 4. Доказать, что группа $SU(2, \mathbb{R})$ гомеоморфна трехмерной сфере S^3 .

Решение. Анализ условий, которым должна удовлетворять матрица из $SU(2, \mathbb{R})$ показывает, что произвольный элемент группы записывается в виде $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$, где $z, w \in \mathbb{C}$ такие, что $|z|^2 + |w|^2 = 1$. То есть $(z, w) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$. $\square$

²На самом деле, две структуры, которыми обладают описанные пространства: структура группы и структура гладкого многообразия являются согласованными. Они согласованы в том смысле, что групповые операции (произведение и взятие обратного элемента) являются гладкими (в смысле структуры многообразия) отображениями. Такие пространства называются *группами Ли*.

Домашнее задание.

Задача 5. Доказать, что группа $U(n, \mathbb{R})$ является гладким многообразием и найти ее размерность.

Задача 6. Исследовать $GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R}), U(n, \mathbb{R}), SU(n, \mathbb{R})$ на компактность и связность.

Задача 7. Доказать, что группа $SO(3, \mathbb{R})$ гомеоморфна трехмерному проективному пространству $\mathbb{R}P^3$.

Решения, указания и ссылки.

5. Решение полностью совпадает с решением Задачи 2, только в некоторых местах надо поставить черту (сопряжение). В этом случае образ дифференциала отображения $F(X) = X\bar{X}^T - 1$ подсчитанного в любой точке унитарной группы будет совпадать с пространством эрмитовых матриц ($\bar{X}^T = X$). Поэтому группа унитарных матриц будет гладким многообразием размерности $\dim U(n) = 2n^2 - \dim \{\text{эрмитовы матрицы}\} = n^2$.

6. Подробное описание классических матричных групп можно найти в книжке А.Т.Фоменко "Симплектическая геометрия", Глава 1, § 1. Ниже приведена таблица ответов

Группа Ли	Компактность	Связность	Размерность
$GL(n, \mathbb{R})$	-	-	n^2
$SL(n, \mathbb{R})$	-	+	$n^2 - 1$
$O(n, \mathbb{R})$	+	-	$n(n-1)/2$
$SO(n, \mathbb{R})$	+	+	$n(n-1)/2$
$U(n, \mathbb{R})$	+	+	n^2
$SU(n, \mathbb{R})$	+	+	$n^2 - 1$

7. Эта задача разбиралась на лекциях. Еще ее решение можно посмотреть в книжке А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс "Курс гомотопической топологии", § 1, стр. 16.

27.04 Гладкие отображения и их дифференциалы. Вложения и погружения.

Определим гладкие отображения гладких многообразий, представляющие естественное обобщение дифференцируемых функций в анализе. Пусть M^n, N^m - два гладких многообразия. Рассматривая M^n и N^m как топологические пространства, можно говорить о непрерывных отображениях $f : M^n \rightarrow N^m$. Гладкие структуры, заданные на многообразиях, позволяют ввести более узкий класс отображений. Отображение $f : M^n \rightarrow N^m$ естественно задать в локальных координатах. Именно: если $x \in M^n$ - произвольная точка, $(U, \varphi), (V, \psi)$ - карты в многообразиях M^n, N^m соответственно такие, что $x \in U, f(x) \in V$, и $W(x)$ - окрестность точки x такая, что $W(x) \subset U, f(W(x)) \subset V$ (которая существует в силу непрерывности f в x). Тогда отображение

$$\psi f \varphi^{-1} : \varphi(W(x)) \rightarrow \psi(V)$$

называется *координатным представлением отображения f* в окрестности точки x . Такое представление позволяет привлечь понятие гладкого отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, изучаемое в анализе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f : M^n \rightarrow N^m$ называется гладким отображением в окрестности точки $x \in M^n$, если некоторое (а тогда и любое в силу гладкости функций склейки) координатное представление f в окрестности x является гладким отображением областей евклидовых пространств.³

От локальных определений перейдем к глобальным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f : M^n \rightarrow N^m$ многообразий называется *гладким*, если оно гладкое в окрестности каждой точки $x \in M^n$.

В теории гладких многообразий гладкие отображения играют ту же роль, что какую играют непрерывные отображения в общей теории топологических пространств.

Простейшим примером гладкого отображения может служить тождественное отображение гладкого многообразия на себя. Композиция двух гладких отображений также является гладким отображением.

³Для случая подмногообразий в $\mathbb{R}^N$ определение гладкости отображения в точке можно дать в других терминах. Пусть M^n, N^m - подмногообразия в $\mathbb{R}^N$ и $\mathbb{R}^M$ соответственно. Тогда отображение $f : M^n \rightarrow N^m$ называется гладким отображением в окрестности точки $x \in M^n$, если существуют открытое множество $U \subset \mathbb{R}^N, x \in U$, и гладкое отображение $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^M$, совпадающее с f на $U \cap M^n$.

Задача 1. Пусть $\mathbb{T}^2$ тор в $\mathbb{R}^3$, полученный вращением окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$ вокруг оси y . И пусть (a, b, c) координаты внешней нормали к $\mathbb{T}^2$ в точке p . Тогда, поскольку $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, тройку (a, b, c) можно рассматривать как координаты точки на двумерной сфере. Возьмем эту точку за $f(p)$. Докажите, что f есть гладкое отображение тора в сферу.

Решение. Докажем, что отображение f является гладким в окрестности точки $A = (3, 0, 0)$. Для других точек доказательство аналогично (хотя из определения отображения ясно, что если оно гладко в одной точке, то гладко и всюду на торе, т.к. устроено везде одинаково).

Возьмем точку на окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$ в плоскости (x, y) , для которой луч, направленный к ней из центра окружности, образует угол θ с положительным направлением оси x . Проведем через эту точку окружность, параллельную плоскости (x, z) и лежащую на торе, а затем возьмем точку, смещенную на угол φ по этой окружности (нарисуйте рисунок!). Тогда положение точки $x \in \mathbb{T}^2$ можно задавать парой (θ, φ) . Заметим, что это не есть система координат на всем торе, т.к. для данной точки x углы θ и φ определены только с точностью до целого кратного 2π . Тем не менее (θ, φ) можно принять за локальные координаты в окрестности точки $A \leftrightarrow (0, 0)$. Легко подсчитать, что в объемлющих координатах $(x, y, z) = r \in \mathbb{R}^3$ в окрестности точки A тор будет задаваться следующим образом

$$\begin{cases} x &= (2 + \cos \theta) \cos \varphi \\ y &= \sin \theta \\ z &= (2 + \cos \theta) \sin \varphi \end{cases}$$

Отсюда можно вычислить координаты внешней нормали: $n = r_\theta \times r_\varphi$.

$$n = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta, \cos \theta \sin \varphi) \in S^2$$

Отображение f переводит точку A в точку $(1, 0, 0)$ сферы. В качестве карты на сфере, содержащей точку $(1, 0, 0)$, можно взять $(S^2_{1+} = \{x > 0\}, \psi(x, y, z) = (y, z))$. Тогда координатное представление отображения f в окрестности точки A будет иметь вид

$$\psi \circ f \circ (\theta, \varphi)^{-1} : (\theta, \varphi) \mapsto (\sin \theta, \cos \theta \sin \varphi),$$

которое, очевидно, является гладким отображением областей евклидовых пространств. Поэтому отображение f является гладким в окрестности точки A . По причинам, обсуждавшимся в самом начале доказательства, оно является гладким и на всем торе. $\square$

В математике все *объекты* рассматриваются с точностью до некоторых "преобразований" (*морфизмов*). Эти преобразования сохраняют свойства объектов, которые мы изучаем. Так, множества рассматриваются с точностью биекций, группы с точностью до гомоморфизмов, топологические пространства с точностью до гомеоморфизмов и тд. Роль таких "преобразований" в случае гладких многообразий играют диффеоморфизмы.

Очевидно, гомеоморфизмы не сохраняют структуру гладкого многообразия (хотя карта по-прежнему переходит в карту, гладкость функций склейки разрушается). Поэтому требуется усилить определение гомеоморфизма так, чтобы гладкая структура сохранялась.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f : M \rightarrow N$ гомеоморфизм гладких многообразий. Если отображение f является гладким, и, более того, обратное отображение f^{-1} так же является гладким, то отображение f называется *диффеоморфизмом*. Если существует диффеоморфизм M в N , то говорят, что многообразия *диффеоморфны*.⁴

Задача 2. Привести пример гладкого гомеоморфизма, который не является диффеоморфизмом.

Решение. Рассмотрим отображение прямой со стандартной структурой гладкого многообразия на себя, задаваемое формулой

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^3$$

Ясно, что f - гладкий гомеоморфизм. Однако, обратное отображение $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ не является гладким (т.к не имеет производной в нуле). Поэтому f не является диффеоморфизмом. $\square$

Свойства многообразий, сохраняющиеся при диффеоморфизмах называются *дифференциальными инвариантами*. Одним из таких инвариантов является размерность многообразия.⁵

Задача 3. Зададим на прямой (с обычной топологией) структуру гладкого многообразия двумя разными способами : с помощью карт $(\mathbb{R}, \varphi(x) = x)$ и $(\mathbb{R}, \psi(x) = x^3)$ соответственно. Докажите, что эти многообразия диффеоморфны.⁶

⁴Совокупность гладких многообразий образует *категорию*, морфизмами которой служат диффеоморфизмы многообразий.

⁵Аналогичный результат верен и для гомеоморфных топологических пространств, но его доказательство гораздо сложнее.

⁶Эта задача отражает общую ситуацию. Как уже отмечалось, если на многообразии существует хотя бы одна C^n -структура ($n \geq 1$), то на нем существует бесконечно много гладких структур, однако определяемые ими гладкие многообразия большей частью диффеоморфны. Например, известно, что все гладкие структуры на $\mathbb{R}^n$

Решение. Докажем, что отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определенное следующим образом $f(x) = \sqrt[3]{x}$ является диффеоморфизмом указанных многообразий.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

Непрерывность f очевидна. Координатное представление f имеет вид:

$$\psi f \varphi^{-1}(x) = \psi f(x) = \psi(\sqrt[3]{x}) = x$$

Это гладкое отображение евклидовых пространств, поэтому f - гладкое отображение многообразий. Координатное представление обратного отображения $f^{-1}(x) = x^3$ имеет вид

$$\varphi f^{-1} \psi^{-1}(x) = \varphi f^{-1}(\sqrt[3]{x}) = \varphi(x) = x$$

Поэтому f^{-1} тоже гладкое отображение, следовательно f - диффеоморфизм. $\square$

В математическом анализе центральной идеей является переход от дифференцируемых функций общего вида к более узкому классу - многочленам (начальным отрезкам соответствующего ряда). В простейшем случае переход осуществляется к соответствующей линейной функции - дифференциалу. Соответствующий метод называется *линеаризацией*. В случае гладких многообразий, для произвольного гладкого отображения тоже можно построить естественное линейное отображение. Оно то и называется дифференциалом.

Пусть $F : M \rightarrow N$ гладкое отображение и $x \in M$ произвольная точка на M . Тогда можно определить следующее естественное отображение касательного пространства $T_x M$ в касательное пространство $T_{F(x)} N$.

$$d_x F : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$$

(кроме $n = 4$, что удивительно!) задают диффеоморфные многообразия; все гладкие структуры на S^n , $n = 1, 2, 3, 5, 6, 12$ задают гладкие многообразия. Известно также, что если размерность многообразия меньше 4, то из гомеоморфности многообразий следует их диффеоморфность.

Возникает естественный вопрос: существуют ли гомеоморфные, но не диффеоморфные многообразия? Этот вопрос был решен Дж. Милнором в 1956 г. Он показал, что существует ровно 28 гладких многообразий (сферы Милнора), гомеоморфных S^7 , но не диффеоморфных друг другу. Это открытие положило начало выделению дифференциальной топологии в самостоятельную область математики

ИНВАРИАНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пользуемся определением касательного вектора, как операции дифференцирования.⁷ Если $v \in T_x M$, $h \in C^\infty(N)$ - гладкая функция на N , то $d_x F(v)(h) = v(h \circ F)$

КООРДИНАТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ и $(y^1, \dots, y^m)$ локальные координаты в окрестностях точек x и $f(x)$ соответственно. И пусть $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, m$ - координатное представление отображения F . Тогда $(d_x F(v))^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} v^j$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\gamma(t)$ - гладкая кривая на M такая, что $\gamma(0) = x$ и $\dot{\gamma}(0) = v \in T_x M$. Тогда $d_x F(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t))$

В частном случае гладкой функции $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ на многообразии, мы в каждой точке $x \in M$ имеем линейный функционал $d_x f : T_x M \cong \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Матрица этого функционала в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ на M^n - это строка, состоящая из частных производных $\frac{\partial f}{\partial x^i}$. Этот функционал называют *градиентом* функции f в точке x и обозначают через $\text{grad } f|_x$.⁸

Задача 4. Рассмотрим отображение $\exp : M(n) \rightarrow M(n)$, где $M(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ - пространство квадратных матриц.

$$\exp X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots$$

Описать дифференциал отображения $\exp$ в нуле, т.е. $d_0 \exp : T_0 M(n) \rightarrow T_1 M(n)$.

Решение. Будим пользоваться геометрическим определением дифференциала. Рассмотрим в $M(n)$ кривую $\gamma(t)$ такую, что $\gamma(0) = 0$ и

⁷Хотя это определение и наименее наглядно, концептуально оно является наиболее правильным. Смотри по этому поводу книжку М.Э.Казаряна "*Лекции по дифференциальной геометрии*".

⁸Отметим еще раз, что градиент функции - это линейный функционал, а не вектор как почему-то учат в математическом анализе

⁹Перечислим несколько основных свойств экспоненциального отображения

1. Этот ряд сходится для всех матриц X
2. Если матрицы коммутируют, $XY = YX$, то $\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y)$
3. $\exp(X^T) = (\exp X)^T$
4. $\det(\exp X) = e^{\text{Tr } X}$
5. В достаточно маленькой окрестности нуля отображение $\exp$ является диффеоморфизмом. Обратное отображение задается с помощью ряда

$$\ln X = (X - 1) - (X - 1)^2/2 + (X - 1)^3/3 - \dots$$

$\dot{\gamma}(0) = X$. Тогда

$$(d_0 \exp)X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(\gamma(t)) = X$$

Таким образом, дифференциал экспоненциального отображения в нуле представляет собой тождественное отображение. $\square$

Особый интерес представляют некоторые специальные виды отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гладкое отображение $f : M \rightarrow N$ называется *погружением*, если дифференциал $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ является мономорфизмом для любой точки $x \in M$ ($\Leftrightarrow \forall x \in M \operatorname{rk} (d_x f) = \dim M$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Погружение f называется *вложением* если оно является гомеоморфизмом на свой образ.¹⁰ Образ вложения называется *подмногообразием*.

Условие мономорфности дифференциала отображения $f : M \rightarrow N$ автоматически влечет следующее соотношение на размерности многообразий: $\dim M \leq \dim N$.

Все погружения локально устроены как стандартное вложение $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, переводящее точку $(x^1, \dots, x^n)$ в точку $(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$.

Образ многообразия при погружении не обязан быть многообразием (см. Задачу 5). Образ $f(M)$ многообразия при вложении, т.е. подмногообразие, является гладким многообразием, диффеоморфным M .

Задача 5. Рассмотрим семейство отображений прямой в плоскость, заданное так $f_a : t \mapsto (t^2, t^3 + at)$. При каких значениях параметра отображение будет погружением, а при каких вложением?

Решение. Матрица дифференциала отображения f_a имеет вид

$$d_t f_a = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 + a \end{pmatrix}$$

Отображение f_a будет погружением тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} d_t f_a = 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, f_a погружение при всех $a \neq 0$. Далее, как легко проверить, отображение f_a будет вложением только при $a > 0$. Если $a < 0$, то кривая $f_a(\mathbb{R})$ имеет самопересечение (постройте график этой кривой при $a = -1, 0, 1$ для большей наглядности того, как устроено это отображение). $\square$

¹⁰Иногда бывает полезным следующее описание вложений. Пусть $f : M \rightarrow N$ взаимно однозначное с образом погружение, причем образ $f(M)$ замкнут в N . Тогда f - вложение.

Домашнее задание.

Задача 6. Найти образ "касательного вектора" $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ под действием дифференциала экспоненты в точке $X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$:

$$d_X \exp : T_X M(2) \rightarrow T_{\exp X} M(2)$$

Задача 7. Пусть M - некомпактное многообразие, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ взаимно однозначное с образом погружение. Является ли оно вложением? (сравните ответ со сноской 10)

Задача 8. Является ли отображение $\exp$ погружением? А вложением?

04.05 Поверхности, первая и вторая квадратичные формы.

Геометрия поверхностей в евклидовом пространстве, которая была известна еще Гауссу, является предметом изучения *классической дифференциальной геометрии*. На этом простом и наглядном материале можно понять суть дифференциально геометрического подхода.

Основным объектом изучения для нас будут двумерные поверхности в стандартном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Напомним, что все кривые с метрической точки зрения одинаковы в следующем смысле: на каждой регулярной кривой (кривая регулярна, если вектор скорости нигде не обращается в нуль) можно ввести такую параметризацию (натуральную), что длина отрезка кривой между точками, соответствующими значениям параметра t_1 и t_2 , вычисляется одинаково: она равна $|t_1 - t_2|$. В теории поверхностей подобных результатов нет. Например, на стандартной сфере нельзя ввести координаты так, чтобы формулы для вычисления длин кривых на сфере стали такими же как на плоскости. Таким образом, поверхности обладают некоторыми *внутренними инвариантами*, т.е. инвариантами, не зависящими от координат. Поверхности - это простейшие объекты, на которых возникает внутренняя геометрия.

Пожалуй, самым коротким, но при этом кощунственным является следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Регулярной поверхностью* в $\mathbb{R}^3$ называется двумерное гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^3$.¹¹

С помощью теоремы о неявных функциях уточним это определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ называется регулярной поверхностью, если выполняется одно из следующих условий:

1. В достаточно малой окрестности каждой своей точки Σ выделяется как множество нулей такой гладкой функции $F(x^1, x^2, x^3)$, что в этой окрестности $\frac{\partial F}{\partial x^3} \neq 0$ после подходящей перенумерации координат.

2. В достаточно малой окрестности каждой своей точки Σ задается как график гладкого отображения $x^3 = f(x^1, x^2)$ после подходящей перенумерации координат.

3. В достаточно малой окрестности каждой своей точки Σ задается как образ гладкого отображения $r : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, где U - область на плоскости с координатами (u^1, u^2) , причем во всех точках этой области векторы $r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}$ и $r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}$ линейно независимы.

¹¹ Кощунство заключается в том, что именно понятие многообразия возникло как обобщение регулярной поверхности

ЗАМЕЧАНИЕ. *Регулярность*, как и в случае кривых, означает, что во всех точках нашей поверхности существует полноценное касательное пространство. Именно это и обеспечивают условия типа $\frac{\partial F}{\partial x^3} \neq 0$ и линейная независимость векторов r_1 и r_2 .

Хотя все три определения эквивалентны, мы в дальнейшем будем пользоваться третьим, использующим локальные координаты. Это удобно при рассмотрении кривых на поверхности - не надо задавать кривую в $\mathbb{R}^3$ и накладывать на нее аналитические условия, чтобы она лежала на поверхности, а достаточно задать кривую

$$\gamma : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

как гладкое отображение в область U . Если кривая не лежит в окрестности в одних и тех же локальных координатах, то она задается как семейство отображений в такие области. Эти отображения склеиваются в областях, которые описываются несколькими системами координат, чтобы корректно задать кривую и ее векторы скорости. Мы будем заниматься локальной теорией поверхностей, поэтому можно считать, что поверхность задается при помощи одной системы координат (карты).

Из определения касательного пространства и требования регулярности следует, что в каждой точке $x = r(u^1, u^2)$ регулярной поверхности Σ векторы r_1 и r_2 задают базис в $T_x \Sigma$. Этот базис называется *каноническим*. Кроме того, на касательном пространстве $T_x \Sigma$, рассматриваемом как линейное пространство, корректно определена невырожденная, положительно определенная квадратичная форма $\mathfrak{g}$, матрица $\mathfrak{G}$ которой в каноническом базисе имеет вид:

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \langle r_1, r_1 \rangle & \langle r_1, r_2 \rangle \\ \langle r_1, r_2 \rangle & \langle r_2, r_2 \rangle \end{pmatrix}$$

где через $\langle, \rangle$ обозначено стандартное евклидово произведение в $\mathbb{R}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратичная форма $\mathfrak{g}$ называется *первой квадратичной формой* поверхности.

Первая квадратичная форма поверхности позволяет вычислять длины и углы между векторами в касательном пространстве (в силу того, что оно определяет там скалярное произведение), длины кривых на поверхности и площадь самой поверхности.

• Пусть $v, w \in T_x \Sigma$ вектора в касательном пространстве и $\varphi_{v,w}$ - угол между ними, тогда

$$|v| = \sqrt{\mathfrak{G}(v, v)}, \quad \cos \varphi_{v,w} = \frac{\mathfrak{G}(v, w)}{|v| \cdot |w|} \quad \text{при } v \neq 0 \text{ и } w \neq 0$$

- Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ регулярная кривая на поверхности Σ и $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = (\dot{u}_1, \dot{u}_2)$ - ее вектор скорости в локальных координатах, тогда длина кривой

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\mathfrak{G}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt,$$

- Если $V \subset U$, то площадь части $r(V)$ поверхности Σ равна

$$S_{r(V)} = \int_V \sqrt{\det \mathfrak{G}} du^1 du^2$$

В дифференциальной геометрии первую квадратичную форму часто называют "*квадратом элемента длины*" поверхности. В этом случае используют так называемую "запись в дифференциалах". При этом саму форму $\mathfrak{g}$ обозначают через ds^2 - "квадрат элемента длины", и, в координатах (u^1, u^2) , записывают в виде¹²

$$ds^2 = \mathfrak{G}_{11}(du^1)^2 + \mathfrak{G}_{12}(du^1 du^2 + du^2 du^1) + \mathfrak{G}_{22}(du^2)^2$$

Если гладкое многообразие является обобщением понятия регулярной поверхности, то аналогом первой квадратичной формы поверхности в случае многообразий является *риманова метрика*.

Задача 1. Дан геликоид¹³ $r = (u \sin \varphi, u \cos \varphi, \varphi)$. Рассмотрим криволинейный треугольник на геликоиде $0 \leq u \leq \sinh \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. Найти:

- площадь криволинейного треугольника
- длины сторон этого треугольника;
- углы этого треугольника.

Решение. Найдем первую квадратичную форму геликоида.

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial u} = (\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (u \cos \varphi, -u \sin \varphi, 1)$$

Поэтому матрица первой квадратичной формы имеет вид:

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + 1 \end{pmatrix}$$

¹²Эта запись приобретает смысл, если договориться обозначать через du^1 и du^2 линейные функционалы на касательном пространстве $T_x \Sigma$, образующие в двойственном пространстве $T_x^* \Sigma$ двойственный базис по отношению к каноническому. Тогда выражение для ds^2 можно воспринимать как запись квадратичной формы в виде симметричной комбинации произведений линейных форм. Значение формы ds^2 на паре векторов v и w вычисляется так: $ds^2(v, w) = \mathfrak{G}_{11}v^1w^1 + \mathfrak{G}_{12}(v^1w^2 + v^2w^1) + \mathfrak{G}_{22}v^2w^2$

¹³[http : //mathworld.wolfram.com/Helicoid.html](http://mathworld.wolfram.com/Helicoid.html)
[http : //www.coolphysics.com/4d/minimal/helicoid/helicoid.htm](http://www.coolphysics.com/4d/minimal/helicoid/helicoid.htm)
[http : //www.xahlee.org/surface/helicoid-catenoid/helicoid-catenoid1g1.html](http://www.xahlee.org/surface/helicoid-catenoid/helicoid-catenoid1g1.html)

а. Площадь криволинейного треугольника равна

$$S = \int_0^{\varphi_0} \int_0^{\sinh \varphi} \sqrt{u^2 + 1} du d\varphi = [\text{замена } u = \sinh x] = \frac{\varphi_0^2 + \sinh^2 \varphi_0}{4}$$

б. Стороны криволинейного треугольника на геликоиде задаются следующими кривыми (нарисуйте криволинейный треугольник на плоскости, соответствующий области изменения локальных координат):

$$\gamma_1 : t \in [0, \varphi_0] \mapsto (0, t), \quad \dot{\gamma}_1 = (0, 1)$$

$$\gamma_2 : t \in [0, \sinh \varphi_0] \mapsto (t, 0), \quad \dot{\gamma}_2 = (1, 0)$$

$$\gamma_3 : t \in [0, \varphi_0] \mapsto (\sinh t, t), \quad \dot{\gamma}_3 = (\cosh t, 1)$$

Вычислим длины этих кривых.

$$L_1 = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{(0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} dt = \varphi_0$$

$$L_2 = \int_0^{\sinh \varphi_0} \sqrt{(1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} dt = \sinh \varphi_0$$

$$\begin{aligned} L_3 &= \int_0^{\varphi_0} \sqrt{(\cosh t, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \sinh^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh t \\ 1 \end{pmatrix}} dt \\ &= \int_0^{\varphi_0} \sqrt{1 + \cosh^2 t + \sinh^2 t} dt = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{2 \cosh^2 t} dt = \sqrt{2} \sinh \varphi_0 \end{aligned}$$

с. Вершины треугольника имеют следующие локальные координаты $A_{12} = (0, \varphi_0)$, $A_{13} = (0, 0)$, $A_{23} = (\sinh \varphi_0, \varphi_0)$. Касательные векторы к сторонам треугольника в этих точках имеют вид:

$$\dot{\gamma}_1(A_{12}) = (0, -1), \quad \dot{\gamma}_2(A_{23}) = (-1, 0), \quad \dot{\gamma}_3(A_{13}) = (1, 1)$$

$$\dot{\gamma}_1(A_{13}) = (0, 1), \quad \dot{\gamma}_2(A_{12}) = (1, 0), \quad \dot{\gamma}_3(A_{23}) = (-\cosh \varphi_0, -1)$$

Теперь можно вычислить косинусы углов треугольника

$$\cos \psi_{12} = \frac{(0, -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{(0, -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{(1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = 0$$

$$\cos \psi_{13} = \frac{(1,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(1,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{(0,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \psi_{23} = \frac{(-1,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \sinh^2 \varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cosh \varphi_0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \sinh^2 \varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-\cosh \varphi_0, -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \sinh^2 \varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cosh \varphi_0 \\ -1 \end{pmatrix}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Отсюда следует, что углы при вершинах A_{12} , A_{13} , A_{23} равны соответственно $\pi/2, \pi/4, \pi/4$. $\square$

В дифференциальной геометрии поверхностей сложилась следующая терминология. Объекты и величины, определяемые первой квадратичной формой принято называть элементами *внутренней геометрии*. К внутренней геометрии, например, принадлежат длины кривых, углы между кривыми, площади поверхностей. Однако первая квадратичная форма определяет не все. Например, в терминах первой квадратичной формы нельзя вычислить кривизну кривой на поверхности. Объекты и величины, для определения которых недостаточно первой квадратичной формы, называют элементами *внешней геометрии* поверхности. Для их описания нам потребуется вторая квадратичная форма поверхности.

Обозначим через $n(u^1, u^2)$ такую нормаль к регулярной поверхности в точке $r(u^1, u^2)$, что (r_1, r_2, n) - положительно ориентированный репер в $\mathbb{R}^3$. Она находится явно по формуле:

$$n = \frac{r_1 \times r_2}{||r_1 \times r_2||}$$

Обозначим через r_{jk} вектор $\partial^2 r / \partial u^j \partial u^k$. Зададим в произвольной точке $x \in \Sigma$ симметричную матрицу $\mathfrak{H}$, положив

$$\mathfrak{H}_{jk} = \langle r_{jk}, n \rangle$$

Оказывается, что эти соотношения корректно определяют в произвольной точке x поверхности Σ некоторую квадратичную форму $\mathfrak{h}$ на касательном пространстве $T_x \Sigma$ ¹⁴.

¹⁴Корректность означает, что при регулярной замене координат $v^1 = v^1(u^1, u^2)$,

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратичная форма $\mathfrak{h}$ называется *второй квадратичной формой* поверхности.

В отличие от первой квадратичной формы поверхности, вторая квадратичная форма, вообще говоря, не обязана быть ни невырожденной, ни положительно определенной.

Выясним геометрический смысл второй квадратичной формы. Пусть

$$\gamma : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{r} \mathbb{R}^3$$

бигулярная кривая¹⁵ на поверхности.

ТЕОРЕМА МЕНЬЕ. Кривизна кривой γ на поверхности удовлетворяет уравнению

$$k \cos \theta = \frac{\mathfrak{H}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}{\mathfrak{G}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})},$$

где θ - угол между n_γ и n , нормальными к кривой и к поверхности.

Пусть вектор v - касательный вектор к поверхности в точке $r(u^1, u^2)$ и n - вектор нормали к поверхности в этой же точке. Проведем, через точку $r(u^1, u^2)$ двумерную плоскость, натянутую на векторы n и v . Пересечение этой плоскости и поверхности - кривая $\gamma_{u^1, u^2, v}$ - называется *нормальным сечением*, отвечающим точке $r(u^1, u^2)$ и касательному вектору v . Из теоремы Менье вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Кривизна нормального сечения $\gamma_{u^1, u^2, v}$ равна

$$k_n(v) = \pm \frac{\mathfrak{H}(v, v)}{\mathfrak{G}(v, v)}$$

"+" если нормали к поверхности и к нормальному сечению совпадают, "-" иначе.

Таким образом, среди всех кривых проходящих через данную точку поверхности и имеющих данный касательный вектор v , наименьшую кривизну будет иметь нормальное сечение. Имеет место соотношение:

$$k(v) |\cos \theta| = k_n(v)$$

Иногда именно это утверждение называют теоремой Менье.

$v^2 = v^2(u^1, u^2)$ матрица квадратичной формы будет меняться так: $\mathfrak{H}(u) = J^T \mathfrak{H}(v(u)) J$, где J - матрица Якоби замены координат.

¹⁵Напоминание:

- натурально параметризованная ($|\dot{\gamma}(t)| = 1$) регулярная кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется *бигулярной*, если $d^2\gamma/dl^2 \neq 0$
- *нормалью* бигулярной кривой называется вектор $n_\gamma = \frac{d^2\gamma}{dl^2} / \left\| \frac{d^2\gamma}{dl^2} \right\|$
- *кривизной* (пространственной) кривой называется величина $k = \left\| \frac{d^2\gamma}{dl^2} \right\|$

Задача 2. Рассмотрим прямой круговой цилиндр. Пусть Π - плоскость, пересекающая ось цилиндра под углом α . Эта плоскость пересекает цилиндр по некоторому эллипсу. Найти кривизну этого эллипса в точке p , наиболее удаленной от его центра.

Решение. 1. Способ.

Зададим цилиндр параметрически при помощи локальных координат (φ, z) :

$$r = (A \cos \varphi, A \sin \varphi, z)$$

Вычислим первую и вторую квадратичные формы цилиндра:

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (-A \sin \varphi, A \cos \varphi, 0), \quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{r_1 \times r_2}{\|r_1 \times r_2\|} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$r_{11} = \frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2} = (-A \cos \varphi, -A \sin \varphi, 0), \quad r_{12} = \frac{\partial^2 r}{\partial \varphi \partial z} = 0, \quad r_{22} = \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = 0$$

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Касательный вектор к эллипсу в точке p имеет вид $\dot{\gamma}(p) = (\xi, 0)$. Так как нормаль к поверхности направлена во внешность цилиндра, а нормаль к эллипсу - внутрь, то угол $\theta = \pi/2 + \alpha$. Поэтому

$$k(p) \cos(\pi/2 + \alpha) = \frac{(\xi, 0) \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}}{(\xi, 0) \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{A}$$

$$k(p) = \frac{1}{A \sin \alpha}$$

2 Способ. Так как нормальными сечениями цилиндра являются окружности (кривизны которых мы знаем), то удобно воспользоваться формулой

$$k|\cos \theta| = k_n(v)$$

В данном случае v - касательный вектор к эллипсу в точке p , $k_n(v) = 1/A$, т.к. плоскость, натянутая на вектора n и v пересекает цилиндр по окружности, $\theta = \pi/2 + \alpha$. В итоге получаем тот же ответ: $k(p) = \frac{1}{A \sin \alpha}$. $\square$

Задача 3. Найти первую и вторую квадратичные формы поверхности, заданной в виде графика функции $z = f(x, y)$

Решение. Такая поверхность очень просто задается в параметрическом виде: $r(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$. Далее все по определению.

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1} = (1, 0, f_1), \quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2} = (0, 1, f_2)$$

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} 1 + f_1^2 & f_{12} \\ f_{12} & 1 + f_2^2 \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{(-f_1, -f_2, 1)}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}$$

$$r_{11} = (0, 0, f_{11}), \quad r_{12} = (0, 0, f_{12}), \quad r_{22} = (0, 0, f_{22})$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}$$

□

Задача 4. Построим по функции $y = f(x)$ поверхность вращения (поворачиваем график вокруг оси Ox). Найти первую и вторую квадратичные формы этой поверхности.

Решение. Поверхность вращения можно задать параметрически:

$$r(u, \varphi) = (u, f(u) \cos \varphi, f(u) \sin \varphi)$$

Далее все по определению.

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial u} = (1, f'(u) \cos \varphi, f'(u) \sin \varphi), \quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (0, -f(u) \sin \varphi, f(u) \cos \varphi)$$

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} 1 + (f')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{(f', -\cos \varphi, -\sin \varphi)}{\sqrt{1 + (f')^2}}$$

$$r_{11} = (0, f''(u) \cos \varphi, f''(u) \sin \varphi), \quad r_{12} = (0, -f'(u) \sin \varphi, f'(u) \cos \varphi),$$

$$r_{22} = (0, -f(u) \cos \varphi, -f(u) \sin \varphi)$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f')^2}} \begin{pmatrix} -f'' & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

□

Домашнее задание.

Задача 5. Найдите угол между линиями $v = u + 1$ и $v = 3 - u$ на поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u^2$$

Задача 6. Вычислить вторую квадратичную форму тора.