Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Механико-Математический факультет

На правах рукописи

Зуев Константин Михайлович

УДК 514.74, 517.927.25

Формальный метод сдвига аргумента и геометрия интегрируемых геодезических потоков

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители: академик РАН А. Т. Фоменко,
д.ф.-м.н. А. В. Болсинов

МОСКВА — 2008

Оглавление

Введение

Настоящая диссертация посвящена исследованию вполне интегрируемых гамильтоновых систем и состоит из двух независимых частей.

Первая часть диссертации мотивирована геометрическим доказательством гипотезы Мищенко–Фоменко [24], полученным А. В. Болсиновым [7].

Гипотеза Мищенко–Фоменко утверждает, что для каждой вещественной или комплексной алгебры Ли существует полный коммутативный набор полиномов на ее двойственном пространстве. Для случая полупростых алгебр Ли эта гипотеза была доказана А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко при помощи разработанного ими метода сдвига аргумента [23]. В общем случае доказательство было впервые получено С. Т. Садэтовым [26]. Оказалось, что доказательство становится возможным, даже если вместо поля вещественных или комплексных чисел рассматривать алгебры Ли над абстрактным полем. А именно, теорема Садэтова говорит, что гипотеза Мищенко–Фоменко справедлива для произвольной конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики. А. В. Болсинов в работе [7] изложил чисто алгебраическое доказательство Садэтова на более явном языке пуассоновой геометрии, что сделало доказательство конструктивным и позволило эффективно работать с конкретными алгебрами Ли.

В основе доказательства лежит конструкция, которая сводит задачу к алгебре Ли меньшей размерности над новым полем, являющимся расширением исходного. Это позволяет действовать по индукции: на каждом шаге мы сводим задачу к построению полного коммутативного набора полиномов для алгебры меньшей размерности и действуем так до тех пор, пока не получим абелеву или полупростую алгебру Ли. В последнем случае остается применить метод сдвига аргумента [23]. Однако, хорошо известно, что метод сдвига аргумента дает полный коммутативный набор полиномов не только в полупростом случае, но и для многих других классов алгебр Ли. Поэтому, естественно было бы применять его не только к полупростым, а вообще ко всем возникающим в процессе индукции алгебрам. Техническая проблема заключается в том, что критерий полноты для коммутативного набора, построенного методом сдвига аргумента, известен только в вещественном и комплексном случаях [5]. Имея такой критерий для произвольного поля, можно было бы существенно упростить описанную процедуру построения полного коммутативного набора. А именно, делать индуктивный шаг, понижающий размерность алгебры, только в том случае, когда коммутативный набор, построенный методом сдвига аргумента, не является полным согласно новому критерию. В первой части диссертации мы строим обобщение метода сдвига аргумента (формальный метод сдвига аргумента) для алгебр Ли над произвольным полем характеристики нуль и доказываем критерий полноты для коммутативного набора полиномов, построенного этим методом.

Перейдем к краткому изложению структуры и главных результатов первой части диссертации. В разделе 1.1 мы напоминаем основные определения, формулируем гипотезу Мищенко–Фоменко в терминах пуассоновой алгебры $P(\mathfrak{g})$ и обсуждаем центральную идею ее доказательства. В разделе 1.2 мы напоминаем метод сдвига аргумента [23] и критерий полноты для вещественного и комплексного случаев [5].

Начиная с раздела 1.3 мы рассматриваем алгебры Ли над произвольным полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Хорошо известно, что инварианты коприсоединенного представления, вообще говоря, не обязаны быть полиномами. В вещественном и комплексных случаях этот недостаток можно легко устранить, разложив инвариант f в ряд Тейлора в окрестности точки $a \in \mathfrak{g}^*$

$$f(a + \lambda x) = f(a) + \lambda f_{a,1}(x) + \lambda^2 f_{a,2}(x) + \dots$$

и взяв вместо самого инварианта полиномы $\{f_{a,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Одна из трудностей, с которой мы сталкиваемся при переходе к абстрактному полю, — это отсутствие на поле $\mathbb{K}$ априорно заданной топологии, и, как следствие, отсутствие дифференцирования функций на $\mathfrak{g}^*$, разложения их в ряд и т.д. В разделе 1.3 вместо кольца всех инвариантов алгебры Ли $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ мы рассматриваем центр ее пуассоновой алгебры $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Таким образом, мы ограничиваемся рассмотрением только полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*$, а в этом случае дифференцирование можно определить чисто алгебраически (формально), без понятия непрерывности. Недостатком такого подхода является то, что нам может просто не хватить полиномов из центра для построения полного набора. Поэтому мы должны потребовать, чтобы меньшее, вообще говоря, множество $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ совпадало со множеством всех инвариантов $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ в смысле функциональной зависимости. В результате получается следующий критерий полноты для полиномиального случая (см. также [45]):

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— конечномерная алгебра Ли над полем* $\mathbb{K}$ *характеристики нуль,* $\operatorname{trdeg} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$ *и* $a \in \mathfrak{g}^*_{reg}$. *Коммутативный набор полиномиальных* a*-сдвигов центральных функций является полным тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2.$$

Здесь $\mathfrak{g}^*_{reg}$ обозначает множество регулярных элементов (относительно коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$), $\mathfrak{g}^*_{sing} = \mathfrak{g}^* \setminus \mathfrak{g}^*_{reg}$ — множество сингулярных элементов и $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}$ обозначает алгебру Ли над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{K}}$ основного поля (аналог комплексификации для вещественного случая). Отметим, что условие полноты $\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2$ допускает естественную интерпретацию без использования алгебраического замыкания основного поля (см. Замечание 13).

В разделе 1.4 мы отказываемся от условия $\operatorname{trdeg} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$ и исследуем более широкий класс алгебр Ли — класс алгебраических алгебры Ли. В этом случае из теоремы Розенлихта [50, 12] следует, что можно ограничиться рассмотрением рациональных инвариантов. Далее, для построения сдвигов рациональных инвариантов над произвольным полем $\mathbb{K}$, мы используем алгебро-геометрический формализм [31], позволяющий каждой рациональной функции и ее регулярной точке сопоставлять взаимно-однозначным образом формальный ряд Тейлора. В итоге, для алгебраических алгебр Ли критерий полноты имеет следующий вид:

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебраическая алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль и $a \in \mathfrak{g}^*_{reg}$. Коммутативный набор полиномиальных a-сдвигов рациональных инвариантов является полным тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2.$$

В разделе 1.5 мы отказываемся от условия алгебраичности и рассматриваем произвольные конечномерные алгебры Ли. В этом случае, в отличие от вещественных, комплексных или алгебраических алгебр, отсутствует группа (Ли или алгебраическая), в частности, нет ни коприсоединенного представления группы, ни инвариантов этого представления. Тем не менее, оказывается, можно естественным способом определить объекты, играющие роль инвариантов. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то хорошо известно, что аналитическая функция $f \in \mathcal{A}(\mathfrak{g}^*)$ является инвариантом коприсоединенного представления тогда и только тогда, когда $\operatorname{ad}^*_{df(x)} x = 0$. В этом определении участвуют только структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, поэтому оно имеет смысл для любого поля $\mathbb{K}$. В случае произвольного поля надо лишь договориться, что понимать под f. Ограничиться только рациональными функциями $\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)$, как это позволяла сделать теорема Розенлихта в алгебраическом случае, нельзя, так как теперь алгебра Ли не обязательно алгебраическая, и в этом случае рациональных инвариантов для построения полного набора может не хватить. С другой стороны, хорошо известно, что в вещественном или комплексном случае инварианты могут быть глобально не определены, и тогда мы вынуждены рассматривать локальные инварианты, которые по своей сути являются сходящимися рядами. Эти соображения приводят к следующей естественной идее: под инвариантом (точнее формальным инвариантом) коприсоединенного представления мы будем понимать формальный ряд из кольца $\mathbb{K}[[\mathfrak{g}^*]]$, удовлетворяющий некоторому естественному условию (типа $\operatorname{ad}^*_{df(x)} x = 0$). Тогда однородные части таких формальных инвариантов будут аналогами сдвигов "классических" инвариантов.

В разделе 1.5 мы реализуем описанную идею. В параграфе 1.5.1 мы доказываем необходимый технический результат — формальную теорему Фробениуса, которая является формальным аналогом классической теоремы об интегрируемости распределений.

Теорема 7 (Формальная теорема Фробениуса). *Формальное распределение $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ на $\mathbb{K}^n$ постоянного ранга k формально интегрируемо тогда и только тогда, когда все коммутаторы $[v_i, v_j]$ линейно выражаются через $v_1, \dots, v_k$ с коэффициентами из $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$.*

В параграфе 1.5.2 мы вводим понятие "формального инварианта" для любого (не обязательно коприсоединенного) представления алгебры Ли и доказываем существование "максимального" набора таких инвариантов. Существование максимального набора формальных инвариантов является прямым следствием формальной теоремы Фробениуса.

Теорема 8. *Для любого представления $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ и любого регулярного элемента $a \in V$ существует набор $\{F^{(1)}, \dots, F^{(s)}\}$ из $s = \dim V - \dim \mathfrak{g} + \operatorname{St}(a)$ формальных инвариантов представления ρ в точке a, дифференциалы которых в нуле линейно независимы.*

В параграфе 1.5.3 мы рассматриваем коприсоединенное представление алгебры Ли $\operatorname{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$. Используя результаты, полученные в предыдущих параграфах, мы определяем набор полиномов $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ в пуассоновой алгебре $P(\mathfrak{g})$ как набор однородных частей формальных инвариантов представления ad^* в регулярной точке $a \in \mathfrak{g}^*$ и доказываем его коммутативность. Такой метод построения коммутативного набора полиномов мы называем формальным методом сдвига аргумента. Доказательство критерия полноты набора $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ (параграф 1.5.6) почти автоматически следует из двух лемм из линейной алгебры: леммы об иерархии, порождаемой парой билинейных форм (параграф 1.5.4), и леммы о паре кососимметрических билинейных форм (параграф 1.5.5).

Теорема 11. *Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль и $a \in \mathfrak{g}^*_{reg}$ — регулярный элемент.*

1. *Коммутативный набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$, построенный формальным методом сдвига аргумента, является полным тогда и только тогда, когда*
$$\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2.$$
2. *Коммутативный набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ является полным в регулярной точке $x \in \mathfrak{g}^*_{reg}$ тогда и только тогда, когда прямая $\{x + \lambda a \mid \lambda \in \bar{\mathbb{K}}\}$ не пересекает множество $(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing}$.*

В разделе 1.6 мы напоминаем конструкцию, лежащую в основе геометрического доказательства гипотезы Мищенко-Фоменко [7]. Заключительный раздел 1.7 первой части диссертации посвящен примерам применения критерия полноты коммутативного набора полиномов, построенного формальным методом сдвига аргумента.

На основе результатов, полученных в первой части диссертации, готовится статья в журнале “Математические Заметки”.

Во второй части диссертации мы рассматриваем геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов и продолжаем исследования начатые А. В. Болсиновым, И. А. Таймановым, А. П. Веселовым и Х. Р. Дуллиным в работах [8, 9, 34].

Замкнутое многообразие M_A^{n+1} называется надстройкой автоморфизма $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, если существует расслоение

$$p : M_A^{n+1} \xrightarrow{\overset{A}{\curvearrowright}\atop\mathbb{T}^n} S^1$$

многообразия над окружностью S^1 со слоем тор $\mathbb{T}^n$, такое, что монодромия расслоения задается матрицей $A \in SL(n, \mathbb{Z})$.

Многообразие M_A^{n+1} обладает интересными свойствами. Простейший нетривиальный пример с

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

был рассмотрен Л. Батлером [36]. В этой работе была построена аналитическая риманова метрика на M_A^3, геодезический поток которой интегрируем по Лиувиллю при помощи гладких интегралов, но неинтегрируем в классе аналитических функций. Последнее утверждение было доказано при помощи топологических препятствий к аналитической интегрируемости, найденных И. А. Таймановым [28, 29]. Таким образом, было показано, что некоторые из этих топологических препятствий не мешают гладкой интегрируемости.

Г. П. Патернайн [47, 48] доказал, что если геодезический поток на замкнутом многообразии интегрируем, то, при выполнении некоторых дополнительных условий, его топологическая энтропия равна нулю. Он также предположил, что топологическая энтропия интегрируемого геодезического потока на замкнутом многообразии всегда равна нулю. Отметим, что топологическая энтропия в примере Батлера нулевая, что согласуется с гипотезой Патернайна.

А. В. Болсинов и И. А. Тайманов [8] опровергли эту гипотезу для гладкого случая, рассмотрев многообразие M_A^3 с автоморфизмом

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обобщив конструкцию Батлера, они построили первый пример C^∞-интегрируемого геодезического потока с положительной топологической энтропией. Аналогичные результаты имеют место и для случая $n > 2$ [9].

Квантовым аналогом задачи об интегрируемости геодезического потока на многообразии является описание спектра и собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа. В статье [34] авторами построен базис в пространстве $L_2(M_A^3)$, состоящий из собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа, которые описываются при помощи решений так называемого модифицированного уравнения Матье. Во второй части диссертации мы рассматриваем многомерную ситуацию $n > 2$ и главным результатом является описание спектра и построение собственного базиса для оператора Бельтрами–Лапласа на $L_2(M_A^{n+1})$, который описывается при помощи решений одномерного уравнения Шредингера.

Перейдем к краткому изложению структуры и главного результата второй части диссертации. В разделе 2.1 мы напоминаем основные определения связанные с надстройками автоморфизмов торов. В разделах 2.2 и 2.3 мы описываем риманову метрику и оператор Бельтрами–Лапласа на M_A^{n+1}. Раздел 2.4 посвящен доказательству основного результата:

Теорема 13. *Пусть функции $\Psi_{[\gamma],k}$ и $Q_\gamma(z)$ задаются формулами (2.10) и (2.6) соответственно. Тогда набор функций $\{\Psi_{[\gamma],k}, \gamma \in \Gamma^* \setminus \{0\}\} \cup \{1, \cos k\pi z, \sin k\pi z\}$ где $k \in \mathbb{N}$ образует собственный базис оператора Лапласа-Бельтрами в пространстве $L_2(M_A^{n+1})$. При этом функции $\Psi_{[\gamma],k}$ отвечает собственное значение $\mathcal{E}_{[\gamma],k}$, являющееся собственным значением оператора Шредингера на прямой с потенциалом $Q_\gamma(z)$.*

Результаты полученные во второй части диссертации опубликованы в статье [18] и доложены на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2006).

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям — академику РАН А. Т. Фоменко за постоянную поддержку и внимание к работе и профессору А. В. Болсинову за постановку задач, плодотворные обсуждения и ряд ценных замечаний и идей, определивших направление развития этой работы. Автор также благодарен всем сотрудникам кафедры Дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета Московского государственного университета за помощь в течении его учебы.

Глава 1

Формальный метод сдвига аргумента

Одним из центральных направлений теории вполне интегрируемых систем является исследование уравнений Эйлера на двойственных пространствах алгебр Ли:

$$\dot{x} = \mathrm{ad}^*_{df(x)}x, \quad x \in \mathfrak{g}^*, \quad f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

Уравнения Эйлера являются естественным обобщением классических уравнений динамики твердого тела и важность их изучения определяется прежде всего тем, что они возникают во многих задачах математической физики [4], [30]. Метод сдвига аргумента, предложенный А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [23], позволяет проинтегрировать уравнения Эйлера, т.е. построить полный коммутативный набор интегралов, для многих классов вещественных и комплексных алгебр Ли.

В первой части диссертации мы разрабатываем формальный метод сдвига аргумента — аналог классического метода сдвига аргумента для построения коммутативного набора полиномов на двойственных пространствах алгебр Ли над произвольным полем.

1.1 Гипотеза Мищенко–Фоменко

Рассмотрим произвольную конечномерную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Лиевская структура на $\mathfrak{g}$ индуцирует на симметрической алгебре $S(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$ скобку Пуассона-Ли, которая определяется как кососимметрическая билинейная операция, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. Если полиномы $f, g \in S(\mathfrak{g})$ линейны (в этом случае их можно рассматривать как элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$), то их скобка Пуассона-Ли совпадает с коммутатором в алгебре, т.е.

$$\{f, g\} = [f, g].$$

2. На полиномы более высоких степеней скобка Пуассона-Ли распространяется при помощи правила Лейбница:

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}.$$

Структура Пуассона–Ли превращает симметрическую алгебру $S(\mathfrak{g})$ в пуассонову алгебру $P(\mathfrak{g}) = (S(\mathfrak{g}), \{\cdot, \cdot\})$, ассоциированную с $\mathfrak{g}$. Скобка Пуассона–Ли естественным образом продолжается на поле рациональных функций $\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)$. Соответствующую пуассонову алгебру будем обозначать через $\mathrm{Frac}(P(\mathfrak{g})) = (\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*), \{\cdot, \cdot\})$.

Каждой конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ можно сопоставить два целых числа: размерность $\dim \mathfrak{g}$ (характеристика линейной структуры) и индекс $\operatorname{ind} \mathfrak{g}$ (характеристика лиевской структуры). Хорошо известно, что число алгебраически независимых попарно коммутирующих полиномов в $P(\mathfrak{g})$ не превышает $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$.

Замечание 1. На протяжении всей работы, если не оговорено противное, "коммутативность" будет пониматься в смысле скобки Пуассона–Ли.

Определение 1. Коммутативный набор $\mathcal{F} \subset P(\mathfrak{g})$ называется полным, если он содержит $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ алгебраически независимых полиномов.

Любой коммутативный набор полиномов $\mathcal{F}$ порождает коммутативную пуассонову подалгебру $\mathbb{K}[\mathcal{F}] \subset P(\mathfrak{g})$. Коммутативная подалгебра $A \subset P(\mathfrak{g})$ называется подалгеброй максимальной размерности, если $\operatorname{trdeg} A = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$. Подалгебра A называется максимальной, если она максимальна среди всех коммутативных подалгебр $P(\mathfrak{g})$ в теоретико-множественном смысле.

Вопрос о существовании полных коммутативных наборов впервые был сформулирован в работе [24] в виде следующей гипотезы.

Гипотеза (Мищенко, Фоменко, 1981). *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная или комплексная алгебра Ли. Тогда в $P(\mathfrak{g})$ существует полный коммутативный набор полиномов.*

Эта гипотеза пришла из теории интегрируемых гамильтоновых систем. Напомним, что такими системами называются те, которые обладают полными коммутативными алгебрами первых интегралов. Таким образом, на языке гамильтоновых систем, эта гипотеза может быть сформулирована так: на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ каждой вещественной или комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существуют полиномиально интегрируемые гамильтоновы системы. В 1978 г. она была доказана А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко для полупростых алгебр Ли [23]. В 2003 г. С. Т. Садэтов доказал гипотезу Мищенко–Фоменко в общем случае [26].

Теорема 1 (Садэтов, 2003). *Гипотеза Мищенко–Фоменко справедлива для произвольной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики.*

В работе [7] А. В. Болсинов изложил доказательство Садэтова на более явном языке пуассоновой геометрии, позволяющем эффективно работать с конкретными алгебрами Ли. В основе геометрического доказательства теоремы Садэтова, предложенного Болсиновым, лежит следующая лемма:

Лемма 1. *Любая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. *Существует коммутативный идеал $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g}$, не являющийся одномерным центром $\mathfrak{g}$ (т.е. либо $\dim \mathfrak{h} > 1$, либо $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \neq 0$);*

2. *Существует идеал $\mathfrak{h}_m \lhd \mathfrak{g}$, изоморфный алгебре Гейзенберга, и при этом центр $\mathfrak{g}$ совпадает с центром $\mathfrak{h}_m$, $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{h}_m)$;*

3. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста или $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{K}$, где $\mathfrak{g}_0$ полупроста.*

Оказывается, что в первых двух случаях можно сделать индуктивный шаг: свести задачу о построении полного коммутативного набора в $P(\mathfrak{g})$ к построению полного коммутативного набора в $P(\tilde{\mathfrak{g}})$, где $\tilde{\mathfrak{g}}$ — новая алгебра Ли над новым полем $\tilde{\mathbb{K}}$, которая, однако, имеет строго меньшую размерность $\dim_{\tilde{\mathbb{K}}} \tilde{\mathfrak{g}} < \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$. А в третьем случае достаточно применить метод сдвига аргумента: в [23] было доказано, что этот метод дает полный коммутативный набор для вещественных и комплексных алгебр, а в [7] указано, что из общей классификации полупростых алгебр Ли следует, что в полупростом случае метод сдвига аргумента дает полный коммутативный набор полиномов для произвольного поля характеристики нуль.

Таким образом, процедура построения полного коммутативного набора устроена так: если алгебра Ли полупроста, то применяем метод сдвига аргумента, а если нет — то делаем индуктивный шаг. Однако, хорошо известно, что метод сдвига аргумента дает полный коммутативный набор полиномов не только в полупростом случае, но и для многих других алгебр Ли. Поэтому, естественно было бы применять его не только к полупростым, а вообще ко всем алгебрам Ли, возникающим в процессе индукции. Техническая проблема заключается в том, что критерий полноты для коммутативного набора, построенного методом сдвига аргумента, известен только в вещественном и комплексном случаях [5]. Имея такой критерий для произвольного поля, можно было бы существенно упростить описанную процедуру построения полного коммутативного набора. А именно, делать индуктивный шаг $\mathfrak{g} \rightsquigarrow \tilde{\mathfrak{g}}$, понижающий размерность алгебры, только в том случае, когда коммутативный набор в $P(\mathfrak{g})$, построенный методом сдвига аргумента, не является полным.

Нашей целью является обобщение метода сдвига аргумента на случай произвольного основного поля характеристики нуль и получение критерия полноты для коммутативного набора полиномов, построенного этим методом.

1.2 Метод сдвига аргумента

Метод сдвига аргумента является универсальной конструкцией, позволяющей строить семейства функций в инволюции на двойственных пространствах алгебр Ли. Впервые этот метод был предложен А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [23] как обобщение конструкции С. В. Манакова [22], которая применялась к алгебре Ли $so(n)$.

Предположим сначала, что наше основное поле $\mathbb{K}$ является полем вещественных или комплексных чисел. Тогда скобка Пуассона-Ли двух гладких функций $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ определяется следующей формулой:

$$\{f,g\}(x) = \langle x, [d_x f, d_x g]\rangle = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Ясно, что эта скобка при ограничении на пуассонову алгебру $P(\mathfrak{g})$ совпадает со скобкой, описанной в начале раздела (1.1).

Пусть G — группа Ли ассоциированная с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Аналитическая функция $f \in \mathcal{A}(\mathfrak{g}^*)$ называется инвариантом коприсоединенного представления $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$, если $f(x) = f(\mathrm{Ad}_g^* x)$ для всех $g \in G$, $x \in \mathfrak{g}^*$. Другими словами, инварианты — это функции, постоянные на орбитах коприсоединенного представления $\mathcal{O}_x = \{\mathrm{Ad}_g^* x \mid g \in G\}$. Кольцо инвариантов алгебры $\mathfrak{g}$ будем обозначать через $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$. Хорошо известно, что функция является инвариантом $f \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующей системе линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}, \tag{1.1}$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно базиса, соответствующего координатам $x_1, \ldots, x_n$. Полиномиальные инварианты в физической литературе называются также классическими инвариантами Казимира, а в теории инвариантов — целыми или регулярными инвариантами. Хорошо известно, что если аналитическая функция является инвариантом, то и любая ее однородная часть, полученная при разложении в ряд, тоже является инвариантом. Поэтому аналитические инварианты по существу ничем не отличаются от полиномиальных. С другой стороны, система (1.1) может иметь локальные решения, которые не допускают глобальных аналитических продолжений, например, рациональные решения. Поэтому естественным является разрешить аналитическим инвариантам иметь особенности, т.е. рассматривать далее инварианты в классе функций аналитических почти всюду на $\mathfrak{g}^*$.

Из теории дифференциальных уравнений в частных производных следует, что максимальное число функционально независимых инвариантов равно $\min\limits_x \operatorname{corank}(c_{ij}^k x_k)$, т.е. совпадает с индексом алгебры. Напомним, что по определению индекс алгебры Ли $\operatorname{ind}\mathfrak{g} =$

$\min\limits_x \dim \mathrm{Ann}(x)$, где $\mathrm{Ann}(x) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}^*_\xi x = 0\}$ и, как не трудно подсчитать, $\dim \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{corank}\,(c^k_{ij}x_k)$. Так как $\dim \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{codim}\, \mathcal{O}_x$, то в терминах группы Ли G индекс определяется как коразмерность орбиты общего положения $\mathrm{ind}\,\mathfrak{g} = \min\limits_x \mathrm{codim}\, \mathcal{O}_x$. Отметим, что количество функционально независимых инвариантов коприсоединенного представления группы Ли может быть строго меньше чем коразмерность орбиты общего положения. Это связано с тем, что для пространства орбит может нарушаться аксиома отделимости, так как коприсоединенные орбиты не обязательно замкнуты, даже локально. Такие группы иногда называются "дикими" [19]. Простейший пример "дикой" группы Ли был построен Ф. И. Маутнером в 50-х годах и позднее переоткрывался многократно [19].

Пример 1. Рассмотрим семейство 5-мерных групп Ли G_α, которое зависит от вещественного параметра α и имеет следующее матричное представление:

$$G_\alpha \ni g(t, z_1, z_2) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & z_1 \\ 0 & e^{i\alpha t} & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Если α — иррациональное число, то коприсоединенная орбита общего положения является двумерной с трехмерным замыканием (ситуация типа всюду плотной обмотки тора). Ясно, что в этом случае G_α имеет не более двух "глобальных" инвариантов.

Для произвольного фиксированного элемента коалгебры $a \in \mathfrak{g}^*$ определим семейство функций $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$, образованное сдвигами всех инвариантов в направлении a (a-сдвигами),

$$\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g})) = \{f_{a,\lambda}(x) = f(x + \lambda a) \mid f \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}), \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

А.Т. Фоменко и А.С. Мищенко показали [23], что это семейство коммутативно относительно скобки Пуассона-Ли. Однако, как уже было отмечено, инварианты не обязаны быть полиномами, и, следовательно, коммутативное семейство $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ не обязано лежать в пуассоновой алгебре $P(\mathfrak{g})$. Этот недостаток может быть легко устранен при помощи конструкции предложенной А.В. Браиловым.

Определение 2. Набор полиномов $\mathcal{F} \subset P(\mathfrak{g})$ называется набором полиномиальных a-сдвигов функции f, если он функционально эквивалентен семейству $\mathcal{F}_a(f) = \{f_{a,\lambda}(x) = f(x + \lambda a) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$, т.е.

если элементы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_a(f)$ почти всюду функционально выражаются друг через друга.

Пусть функция f является аналитической в точке a. Рассмотрим ее разложение в ряд Тейлора в окрестности точки a:

$$f(a+\lambda x) = f(a) + \lambda f_{a,1}(x) + \lambda^2 f_{a,2}(x) + \dots \tag{1.2}$$

Легко проверяется, что семейство $\mathcal{F}_a(f)$ и набор однородных полиномов $\{f_{a,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ функционально эквивалентны, поэтому $\{f_{a,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ является набором полиномиальных a-сдвигов функции f. Рассмотрим набор однородных полиномов, состоящий из полиномиальных a-сдвигов всех инвариантов алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\{f_{a,k} \mid f \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}), k \in \mathbb{N}\} \subset P(\mathfrak{g}).$$

Так как этот набор функционально эквивалентен семейству $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$, то он является коммутативным набором полиномов в $P(\mathfrak{g})$, и мы будем обозначать его также через $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$. Соответствующая коммутативная подалгебра $\mathbb{K}[\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))] \subset P(\mathfrak{g})$, порожденная этим набором, называется подалгеброй Мищенко-Фоменко.

Пусть $\mathfrak{g}^*_{sing}$ обозначает множество всех Ad^*-сингулярных элементов $\mathfrak{g}^*$, т.е.

$$\mathfrak{g}^*_{sing} = \{x \in \mathfrak{g}^* \mid \operatorname{codim} \mathcal{O}_x > \operatorname{ind} \mathfrak{g}\}.$$

Другими словами, сингулярными являются в точности те точки $x \in \mathfrak{g}^*$, в которых падает ранг матрицы $(c^k_{ij} x_k)$. Множество регулярных элементов $\mathfrak{g}^*_{reg} = \mathfrak{g}^* \setminus \mathfrak{g}^*_{sing}$ является открытым всюду плотным подмножеством $\mathfrak{g}^*$. Отправной точкой в исследовании полноты коммутативного набора полиномов $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ является следующая теорема [23]:

Теорема 2 (Мищенко, Фоменко, 1978). *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная или комплексная полупростая алгебра Ли и $a \in \mathfrak{g}^*_{reg}$. Тогда коммутативный набор полиномиальных a-сдвигов инвариантов $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ является полным.*

В более алгебраических терминах это означает, что коммутативная пуассонова подалгебра Мищенко-Фоменко $\mathbb{K}[\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))] \subset P(\mathfrak{g})$ является коммутативной подалгеброй максимальной размерности.

На самом деле, набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ является полным и для многих других алгебр Ли. Имеет место следующий эффективный критерий полноты [5]:

Теорема 3 (Болсинов, 1988). *Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная вещественная или комплексная алгебра Ли и $a \in \mathfrak{g}^*_{reg}$. Коммутативный набор полиномиальных a-сдвигов инвариантов $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ является полным тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*_{sing} \geq 2.$$

Здесь $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ обозначает комплексификацию алгебры. Если $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*_{sing} = 3$ и полнота набора $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ автоматически следует из критерия.

Предположим теперь, что мы хотим обобщить описанную выше конструкцию построения набора $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ и получить для него критерий полноты аналогичный теореме 3, на случай произвольного поля $\mathbb{K}$ характеристики нуль.

1.3 Критерий полноты: полиномиальный случай

Одна из трудностей, с которой мы сталкиваемся, — это отсутствие на поле $\mathbb{K}$ априорно заданной топологии, и, как следствие, невозможность говорить о дифференцировании функций на $\mathfrak{g}^*$, как в (1.1), или разложении их в ряд, как в (1.2). Таким образом, определение полиномиальных a-сдвигов произвольных инвариантов над абстрактным полем затруднительно. С другой стороны, полиномиальные a-сдвиги полиномов можно определить чисто алгебраически (раскрыть скобки и привести подобные члены). Поэтому естественным решением является вместо кольца $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ всех инвариантов рассмотреть лишь полиномиальные $\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]^G = S(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{I}(\mathfrak{g})$[1]. В этом случае дифференцирование также можно определить чисто алгебраически (формально), без понятия непрерывности. Важно отметить, что алгебра полиномиальных инвариантов $\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]^G$ в точности совпадает с центром пуассоновой алгебры $P(\mathfrak{g})$, который мы будет обозначать через $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Итак, для построения полиномиальных a-сдвигов над

[1]Если мы ограничиваемся рассмотрением полиномов, то необходимость строить полиномиальные a-сдвиги, разумеется, исчезает: обычные a-сдвиги автоматически лежат в пуассоновой алгебре. Однако, так как в будущем мы будем строить полиномиальные a-сдвиги более общих функций, нам будет удобно изучить случай полиномов отдельно.

абстрактным полем на первом шаге мы заменяем кольцо инвариантов алгебры Ли на центр ее пуассоновой алгебры:

$$\mathcal{I}(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow \mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]^G = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}). \tag{1.3}$$

Пусть $f \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $a \in \mathfrak{g}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Рассмотрим сдвиг полинома f в направлении a: $f_{a,\lambda}(x) = f(x + \lambda a)$ и разложим его по степеням λ:

$$f_{a,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{deg f} f_{a,k}(x)\lambda^k.$$

Функции $\{f_{a,k}\}_{k=0}^{deg f-1}$ являются, очевидно, полиномиальными a-сдвигами f. Следуя работе [23], легко показать, что если $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, то набор $\mathcal{F}_a(f_1, \ldots, f_n)$ является коммутативным для любого ковектора $a \in \mathfrak{g}^*$. Поэтому набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$ полиномиальных a-сдвигов всех центральных функций является естественным кандидатом на роль полного коммутативного набора полиномов на $\mathfrak{g}^*$.

Недостатком замены (1.3) является то, что нам может просто не хватить полиномиальных a-сдвигов функций из центра для построения полного набора полиномов. Действительно, если $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ алгебраически независимы, то $n \leq \operatorname{ind}\mathfrak{g}$. Поэтому мы должны потребовать, чтобы меньшее, вообще говоря, множество $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ совпадало со множеством всех инвариантов в смысле функциональной зависимости. Это требование эквивалентно тому, что степень трансцендентности (максимальное число алгебраически независимых элементов) центра пуассоновой алгебры совпадала с индексом алгебры Ли, $\operatorname{trdeg} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$. Как было указано в [45], следуя доказательству теоремы 3 в [6], можно показать, что верна следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль, $\operatorname{trdeg} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$ и $a \in \mathfrak{g}^*_{reg}$. Коммутативный набор полиномиальных a-сдвигов центральных функций $\mathcal{F}_a(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$ является полным тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2.$$

Здесь $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}$ обозначает алгебру Ли над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{K}}$ основного поля (аналог комплексификации для вещественного случая). Напомним, следуя [15], как строится алгебра Ли $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}}$.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. Если $\widetilde{\mathbb{K}}$ — какое-нибудь расширение поля $\mathbb{K}$, то через $V^{\widetilde{\mathbb{K}}}$ мы будем обозначать векторное пространство над $\widetilde{\mathbb{K}}$, полученное из пространства V расширением основного поля: $V^{\widetilde{\mathbb{K}}} = V \otimes_{\mathbb{K}} \widetilde{\mathbb{K}}$. Пусть теперь $\mathfrak{g}$ алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ и $\bar{\mathbb{K}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{K}$. Расширяя $\mathbb{K}$ до $\bar{\mathbb{K}}$, мы получим векторное пространство $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}}$ над $\bar{\mathbb{K}}$. Операция умножения $[\cdot,\cdot]_{\mathbb{K}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ порождает линейные отображения $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}} \otimes \mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}} \to \mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}}$, а тем самым билинейное отображение умножения $[\cdot,\cdot]_{\bar{\mathbb{K}}} : \mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}} \times \mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}} \to \mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}}$. Фактически, если $\{X_1, \ldots, X_n\}$ — базис $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{K}$, то

$$\left[\sum \alpha_i X_i, \sum \beta_j X_j\right]_{\bar{\mathbb{K}}} = \sum \alpha_i \beta_j [X_i, X_j]_{\mathbb{K}},$$

для всех $\alpha_i, \beta_j \in \bar{\mathbb{K}}$. Определенный таким образом коммутатор на $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}}$ превращает $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}}$ в алгебру Ли над $\bar{\mathbb{K}}$.

В работе [45] было получено достаточное условие для того, чтобы подалгебра Мищенко-Фоменко $\mathbb{K}[\mathcal{F}_a(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))] \subset P(\mathfrak{g})$ была максимальной (в теоретико-множественном смысле) коммутативной пуассоновой подалгеброй. В предположении, что $\mathbb{K}$ является алгебраически замкнутым полем, это условие выглядит так: $\mathrm{codim} \mathfrak{g}^*_{sing} \geq 3$ (оно выполнено, например, для редуктивных алгебр). В связи с этим интересно отметить, что для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ существует некоммутативная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ такая, что $\mathrm{codim} \mathfrak{g}^*_{sing} \geq n$. Соответствующий пример, принадлежащий Э. Б. Винбергу, можно найти в [45].

Важно подчеркнуть, что условие $\mathrm{trdeg}\, \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ind}\, \mathfrak{g}$ является существенным требованием в Теореме 4. Это легко увидеть на примере алгебр Ли малых размерностей.

Пример 2. Рассмотрим разрешимую алгебру Ли $\mathfrak{r}_3(\mathbb{K})$ с образующими $\{X_1, X_2, X_3\}$ и коммутационными соотношениями

$$[X_1, X_2] = X_2, \quad [X_1, X_3] = X_3, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Индекс $\mathrm{ind}\, \mathfrak{r}_3 = 1$, и множество сингулярных элементов является прямой $\{x_2 = x_3 = 0\}$, т.е. имеет коразмерность 2. Однако, легко показать, что то центр $\mathcal{Z}(\mathfrak{r}_3)$ тривиален, т.е. алгебра Ли $\mathfrak{r}_3$ не имеет полиномиальных инвариантов (хотя и имеет рациональный x_3/x_2).

Ввиду важной роли целых (полиномиальных) инвариантов в теории представлений и в физических приложениях, интересным вопросом является описание всех классов алгебр Ли, для которых выполнено равенство $\operatorname{trdeg} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$, т.е. алгебр Ли, инварианты которых являются функциями полиномов. Известно, что это верно для нильпотентных [17] и совершенных алгебр Ли [32]. Напомним, что алгебра Ли называется совершенной, если она совпадает со своим коммутантом $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. В частности, полупростые алгебры Ли являются совершенными. Однако, многие другие алгебры Ли, например разрешимые, могут не иметь полиномиальных инвариантов или иметь их в недостаточном количестве.

1.4 Критерий полноты: алгебраический случай

Следующим шагом в обобщении критерия полноты является отказ от условия $\operatorname{trdeg} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$. Отказаться от этого условия можно только путем расширения семейства функций, из которых мы будем получать полиномиальные a-сдвиги. Теперь вместо замены (1.3), где мы ограничились полиномиальными инвариантами, мы рассмотрим поле рациональных инвариантов:

$$\mathcal{I}(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow \mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)^G. \tag{1.4}$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется алгебраической, если она является касательной алгеброй к некоторой алгебраической группе G. Хорошо известно, что если $\mathfrak{g}$ — алгебраическая алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики, то максимальное число алгебраически независимых элементов в $\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)^G$ совпадает с индексом алгебры [37], т.е. $\operatorname{trdeg} \mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)^G = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$. Этот факт является также следствием теоремы (доказанной впервые, по-видимому, Розенлихтом [50]) о том, что для любого действия алгебраической группы на неприводимом многообразии существует конечное множество рациональных инвариантов, разделяющих орбиты общего положения [12]. Таким образом, инварианты алгебраических алгебр Ли функционально выражаются через рациональные инварианты и в этом случае ситуации когда функций из поля $\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)^G$ может заведомо “не хватить” (как это возможно с $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$), быть не может.

Хорошо известно (см., например, [11]), что у каждой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует ее алгебраическое замыкание, т.е. наименьшая алгебраическая алгебра Ли $\mathfrak{g}^a$, содержащая $\mathfrak{g}$. Алгебраическая группа ассоциированная с $\mathfrak{g}^a$ — это замыкание (в топологии Зарисского) связной группы Ли, ассоциированной с $\mathfrak{g}$. Коммутанты алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^a$ совпадают, т.е. $[\mathfrak{g}^a, \mathfrak{g}^a] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Таким образом, условие алгебраичности $\mathfrak{g}$ не очень ограничительно, и уж точно менее жесткое чем условие $\operatorname{trdeg} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$, которое, в алгебраическом случае, выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)^G = \mathbb{Q}\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]^G$, т.е. когда каждый рациональный инвариант представим в виде отношения двух целых [12].

1.4.1 Сдвиги рациональных инвариантов

Для построения a-сдвигов рациональных инвариантов над произвольным полем $\mathbb{K}$ нам потребуется некоторый алгебро-геометрический формализм, который позволяет каждой рациональной функции и ее регулярной точке сопоставить единственным образом формальный ряд Тейлора и, более того, каждая функция будет однозначно восстанавливаться по ее ряду. Напомним соответствующую конструкцию, следуя [31].

Пусть $X = \mathbb{A}^n$ — аффинное пространство[2] над полем $\mathbb{K}$ и $a \in X$. Простейшим локальным инвариантом точки a является ее локальное кольцо $\mathcal{O}_a$, которое состоит из всех рациональных функций на X, регулярных в точке a:

$$\mathcal{O}_a = \{f/g \mid f, g \in \mathbb{K}[X],\ g(a) \neq 0\} \subset \mathbb{K}(X).$$

Обозначим через $\mathfrak{m}_a$ максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_a$:

$$\mathfrak{m}_a = \{f \in \mathbb{K}[X] \mid f(a) = 0\}.$$

Определение 3. Функции $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{O}_a$ называются локальными параметрами в точке a если $u_i \in \mathfrak{m}_a$ и образы $u_1, \ldots, u_n$ при естественной проекции $\mathfrak{m}_a \to \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$ образуют базис в фактор пространстве $\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$.

[2]Конструкция работает и для любых аффинных многообразий $X \subset \mathbb{A}^n$, но так как мы будем применять ее к коалгебре $\mathfrak{g}^*$, то эта общность нам не потребуется, а рассмотрение аффинного пространства делает изложение проще.

Идея сопоставления формальных степенных рядов элементам локального кольца $\mathcal{O}_a$ основана на следующем рассуждении. Для любой функции $f \in \mathcal{O}_a$ положим $f(a) = \alpha_0$, тогда

$$f_1 = f - \alpha_0 \in \mathfrak{m}_a.$$

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ является системой локальных параметров в точке a. Тогда, по определению, $u_1, \ldots, u_n$ порождают все векторное пространство $\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$, т.е. существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ такие, что $f_1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in \mathfrak{m}_a^2$. Положим

$$f_2 = f_1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = f - \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in \mathfrak{m}_a^2.$$

Так как функция $f_2 \in \mathfrak{m}_a^2$, то мы можем представить ее в следующем виде: $f_2 = \sum g_i h_i$, где $g_i, h_i \in \mathfrak{m}_a$. Как и выше, существуют $\beta_{ij}, \gamma_{ij} \in \mathbb{K}$ такие, что $g_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} u_j \in \mathfrak{m}_a^2$ и $h_i - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} u_j \in \mathfrak{m}_a^2$. Положим теперь $\sum_i (\sum_{j=1}^n \beta_{ij} u_j)(\sum_{j=1}^n \gamma_{ij} u_j) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} u_i u_j$, тогда $f_2 - \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} u_i u_j \in \mathfrak{m}_a^3$ и следовательно

$$f_3 = f - \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i - \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} u_i u_j \in \mathfrak{m}_a^3.$$

Продолжая эту конструкцию, мы, очевидно, можем найти однородные полиномы $F_i \in \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_n]$ степени $\deg F_i = i$ такие, что

$$f - \sum_{i=0}^k F_i(u_1, \ldots, u_n) \in \mathfrak{m}_a^{k+1}.$$

Определение 4. Формальный степенной ряд $\Phi = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots$, где $F_i \in \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_n]$ — однородный полином степени $\deg F_i = i$, называется рядом Тейлора функции $f \in \mathcal{O}_a$, если для любого $k \geq 0$ выполнено

$$f - S_k(u_1, \ldots, u_n) \in \mathfrak{m}_a^{k+1}, \quad \text{где } S_k = \sum_{i=0}^k F_i.$$

Приведенное выше рассуждение показывает, что каждая функция $f \in \mathcal{O}_a$ имеет по крайней мере один ряд Тейлора. Можно доказать, что каждая функция имеет на самом деле единственный ряд Тейлора, и, более того, полученное отображение $\tau : \mathcal{O}_a \to \mathbb{K}[[t_1, \ldots, t_n]]$ является изоморфным включением локального кольца $\mathcal{O}_a$ в кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{K}[[t_1, \ldots, t_n]]$. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то формальный ряд Тейлора сходится при малых значениях $t_1, \ldots, t_n$. Доказательства этих утверждений можно найти в [31].

Замечание 2. Соответствие $f \mapsto \Phi$ существенным образом зависит от выбора системы локальных параметров $u_1, \ldots, u_n$. Если система локальных параметров в точке a задается функциями $u_i = x_i - a_i$, то коэффициенты формального ряда Тейлора можно вычислять по тем же формулам, что и в вещественном случае. Для этого нужно всего лишь уметь дифференцировать рациональную функцию над любым полем, а для этого, в свою очередь, достаточно уметь дифференцировать многочлены, что, как мы уже отмечали, можно делать формально над любым полем.

Пусть теперь $X = \mathfrak{g}^*$, $f \in \mathcal{O}_a$ и $\Phi = \tau(f) = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots$ формальный ряд Тейлора функции f. В качестве системы локальных параметров в точке $a \in \mathfrak{g}^*$ возьмем $u_i = x_i - a_i$. Тогда для любого $k \geq 0$ выполнено

$$f(x) = F_0 + F_1(x-a) + \ldots + F_k(x-a) + G_{k+1}(x-a), \quad G_{k+1}(x-a) \in \mathfrak{m}_a^{k+1}.$$

Сделаем в последнем равенстве замену $x \mapsto a + \lambda x$. Пользуясь однородностью полиномов F_i и тем, что эта замена индуцирует изоморфизм идеалов $\mathfrak{m}_a^{k+1} \to \mathfrak{m}_0^{k+1}$, будем иметь:

$$f(a+\lambda x) = F_0 + \lambda F_1(x) + \ldots + \lambda^k F_k(x) + G_{k+1}(\lambda x), \quad G_{k+1}(\lambda x) \in \mathfrak{m}_0^{k+1}.$$

Набор однородных полиномов $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ является набором полиномиальных a-сдвигов функции f.

Пример 3. Рассмотрим разрешимую алгебру Ли $\mathfrak{r}_3(\mathbb{K})$ из примера 2. Как уже было сказано, эта алгебра не имеет полиномиальных инвариантов, но имеет ровно один (т.к. $\operatorname{ind} \mathfrak{r}_3 = 1$) рациональный инвариант $f = x_3/x_2 \in \mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)^G$. Элемент $a = (0, 1, 0) \in \mathfrak{r}_3^*(\mathbb{K})$ является регулярным для f и полиномы $u_1 = x_1$, $u_2 = x_2 - 1$, $u_3 = x_3$ образуют систему локальных параметров в точке a. Пользуясь Замечанием 2, вычислим формальный ряд Тейлора функции f в точке a:

$F_0 = 0,$
$F_s(u) = (-1)^{s-1}(s-1)!u_3u_2^{s-1}$, для $s = 1, \ldots, k,$
$G_{k+1}(u) = u_3u_2^k \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s s! u_2^s \in \mathfrak{m}_0^{k+1},$
$\frac{x_3}{x_2} = x_3 - x_3(x_2-1) + 2x_3(x_2-1)^2 + \ldots + (-1)^k k! x_3(x_2-1)^k + \ldots$

Таким образом, полиномы $F_1 = x_3$ $F_2 = x_2x_3$ (или для простоты $\tilde{F}_1 = x_3$ $\tilde{F}_2 = x_2$) образуют полиномиальный набор a-сдвигов рационального инварианта x_3/x_2. Легко видеть, что этот коммутативный набор является полным, так как $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{r}_3 + \operatorname{ind} \mathfrak{r}_3) = 2$.

Пусть $\mathcal{F}_a(\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)^G)$ — набор полиномиальных a-сдвигов рациональных инвариантов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, построенный описанным способом. Имеет место следующий критерий полноты набора $\mathcal{F}_a(\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)^G)$.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебраическая алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль и $a \in \mathfrak{g}^*_{reg}$. Коммутативный набор полиномиальных a-сдвигов рациональных инвариантов $\mathcal{F}_a(\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)^G)$ является полным тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2.$$

Эта теорема является частным случаем более общего утверждения, которое является главным результатом этой работы и будет сформулировано и доказано ниже.

1.5 Критерий полноты: общий случай

В этом разделе мы отказываемся от условия алгебраичности алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и рассматриваем произвольные конечномерные алгебры Ли над полем нулевой характеристики.

В общем случае, в отличие от вещественных, комплексных или алгебраических алгебр, отсутствует группа (Ли или алгебраическая), в частности, нет ни коприсоединенного представления группы, ни инвариантов этого представления. Тем не менее, оказывается, можно естественным способом определить объекты, играющие роль инвариантов. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то хорошо известно, что аналитическая функция $f \in \mathcal{A}(\mathfrak{g}^*)$ является инвариантом коприсоединенного представления тогда и только тогда, когда $\mathrm{ad}^*_{df(x)}x = 0$. В этом определении участвуют только структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, поэтому оно имеет смысл для любого поля $\mathbb{K}$. В случае произвольного поля надо лишь договориться, что понимать под f. Ограничиться только рациональными функциями $\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)$, как это позволяла сделать теорема Розенлихта в алгебраическом случае, нельзя, так как теперь алгебра Ли не обязательно алгебраическая, и в этом случае рациональных инвариантов для построения полного набора может не хватить. С другой стороны, хорошо известно, что в вещественном или комплексном случае инварианты могут быть глобально не определены и тогда мы вынуждены рассматривать локальные инварианты, которые по своей сути являются сходящимися рядами. Эти соображения приводят к следующей естественной идее: под инвариантом (точнее формальным инвариантом) коприсоединенного представления мы будем понимать формальный ряд из кольца $\mathbb{K}[[\mathfrak{g}^*]]$, удовлетворяющий некоторому естественному условию (типа $\mathrm{ad}^*_{df(x)}x = 0$). Тогда однородные части таких формальных инвариантов будут аналогами сдвигов “классических” инвариантов.

В этом разделе мы реализуем описанную идею. Сначала мы доказываем необходимый технический результат — формальную теорему Фробениуса. Далее, мы вводим понятие “формального инварианта” для любого (не обязательно коприсоединенного) представления алгебры Ли и доказываем существование “максимального” набора таких инвариантов. Затем мы доказываем коммутативность набора полиномов в $P(\mathfrak{g})$, составленного из однородных частей формальных инвариантов представления $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$. Критерий полноты этого набора почти автоматически следует из двух лемм из линейной алгебры.

Существование максимального набора формальных инвариантов является прямым следствием формальной теоремы Фробениуса — формального аналога классической теоремы об интегрируемости распределений.

1.5.1 Формальная теорема Фробениуса

Классическая теорема Фробениуса дает необходимые и достаточные условия интегрируемости (т.е. существования максимального набора функционально независимых решений) системы линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Первоначально теорема Фробениуса формулировалась для пфаффовых систем [38]. Современная геометрическая версия теоремы Фробениуса является критерием интегрируемости распределений на многообразии и может быть сформулирована в терминах дифференциальных форм или на более интуитивном языке векторных полей [16, 27].

Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Гладким k-мерным распределением $\mathcal{D}$ на M называется семейство k-мерных подпространств $\mathcal{D}_x \subset T_xM$, гладко зависящее от точки x. Число k также называют рангом распределения. Интегралом распределения $\mathcal{D}$ называется вложение $F : N \hookrightarrow M$ такое, что $\operatorname{Im} d_yF \subset \mathcal{D}_{F(y)}$ для всех $y \in N$. Говорят, что гладкое k-мерное распределение интегрируемо, если для каждой точки $x \in M$ существует интеграл $F : N \hookrightarrow M$ такой, что $x \in F(N)$ и $\dim N = k$. Другими словами, распределение $\mathcal{D}$ называется интегрируемым, если для каждой точки $x \in M$ существует подмногообразие $N \subset M$, называемое интегральной поверхностью, проходящее через x такое, что $T_yN = \mathcal{D}_y$ для всех $y \in N$.

Говорят, что векторное поле v на M касается распределения $\mathcal{D}$, если $v(x) \in \mathcal{D}_x$ для всех $x \in M$.

Теорема 6 (Теорема Фробениуса)**.** *Гладкое распределение $\mathcal{D}$ на многообразии M интегрируемо тогда и только тогда, когда множество векторных полей, касающихся распределения $\mathcal{D}$, замкнуто относительно коммутатора векторных полей.*

Для того, чтобы получить формальный аналог теоремы Фробениуса, нужно лишь вместо гладких геометрических объектов рассмотреть их формальные аналоги. Опишем соответствующую конструкцию более подробно.

Пусть $\mathbb{K}^n$ — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль. Формальное векторное поле на $\mathbb{K}^n$ — это вектор, компонентами которого являются формальные степенные ряды:

$$v = (v^1(x), \dots, v^n(x)), \quad v^i \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]].$$

Формальный коммутатор формальных векторных полей определяется при помощи стандартной формулы для коммутатора:

$$[u, v]^i = u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}.$$

Так как частные производные формальных рядов хорошо определены над любым полем, то коммутатор формальных векторных полей снова является формальным векторным полем.

Определение 5. Формальным распределением $\mathcal{D}$ на $\mathbb{K}^n$ называется линейная оболочка над $\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$ набора формальных векторных полей:

$$\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}.$$

Ранг формального распределения — это ранг (вычисляемый над $\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$) матрицы, составленной из компонент формальных векторных полей, порождающих распределение:

$$\operatorname{rank} \mathcal{D} = \operatorname{rank} \Xi(x), \quad \Xi(x) = \begin{pmatrix} v_1^1(x) & \ldots & v_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ v_k^1(x) & \ldots & v_k^n(x) \end{pmatrix}.$$

По определению, условие постоянства ранга распределения означает, что ранг формальной матрицы $\Xi(x)$ над кольцом формальных рядов равен рангу “числовой” матрицы $\Xi(0)$, полученной занулением всех переменных. В формальном распределении $\mathcal{D}$ постоянного ранга r всегда можно выбрать базис, т.е. существуют формальные векторные поля $u_1, \ldots, u_r$ такие, что любой элемент из $\mathcal{D}$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации $u_1, \ldots, u_r$ с коэффициентами из $\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$.

Определение 6. Формальным интегралом формального распределения $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ называется формальный ряд $F \in \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$, производные которого вдоль всех формальных векторных полей, определяющих распределение $\mathcal{D}$, равны нулю:

$$v_\alpha(F) := \sum v_\alpha^i \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad \text{для всех } \alpha = 1, \ldots, k. \tag{1.5}$$

Определение 7. Формальное распределение $\mathcal{D}$ на $\mathbb{K}^n$ постоянного ранга k называется формально интегрируемым, если существует $(n-k)$ формальных интегралов $\mathcal{D}$, дифференциалы которых линейно независимы в нуле.

Теорема 7 (Формальная теорема Фробениуса)**.** *Формальное распределение $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ на $\mathbb{K}^n$ постоянного ранга k формально интегрируемо тогда и только тогда, когда все коммутаторы $[v_i, v_j]$ линейно выражаются через $v_1, \ldots, v_k$ с коэффициентами из $\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$ (т.е. распределение $\mathcal{D}$ замкнуто относительно коммутатора).*

Доказательство. Доказательство формальной теоремы Фробениуса до последнего шага совпадает с гладким случаем.

Без ограничения общности, предположим, что подпространство в $\mathbb{K}^n$, порожденное линейно независимыми векторами $v_1(0), \ldots, v_k(0)$, совпадает с линейной оболочкой первых k векторов стандартного базиса в $\mathbb{K}^n$. Так как $\operatorname{rank}\mathcal{D} = k$, то формальные векторные поля $v_1(x), \ldots, v_k(x)$ образуют базис распределения $\mathcal{D}$. Перейдем к более удобному базису. Для этого рассмотрим $k \times k$ матрицу A, образованную первыми k строками и столбцами матрицы

$$\Xi = \begin{pmatrix} v_1^1 & \ldots & v_1^k & v_1^{k+1} & \ldots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_k^1 & \ldots & v_k^k & v_k^{k+1} & \ldots & v_k^n \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A(0) \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} хорошо определена. Поэтому переход $\Xi \to \Xi' = A^{-1}\Xi$ эквивалентен замене базиса: новые базисные формальные векторные поля $v_1'(x), \ldots, v_k'(x)$ являются строками матрицы

$$\Xi' = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & (v')_1^{k+1} & \ldots & (v')_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & (v')_k^{k+1} & \ldots & (v')_k^n \end{pmatrix}.$$

Ясно, что при доказательстве теоремы можно использовать векторные поля $v_1'(x), \ldots, v_k'(x)$ вместо $v_1(x), \ldots, v_k(x)$.

Формальные коммутаторы $[v_i', v_j']$ линейно зависит от $v_1', \ldots, v_k'$ тогда и только тогда, когда формальные векторные поля $v_1', \ldots, v_k'$ попарно коммутируют. Действительно, первые k компонент коммутатора $[v_i', v_j']$ всегда нулевые. Поэтому $[v_i', v_j']$ линейно выражается через $v_1', \ldots, v_k'$ тогда и только тогда, когда $[v_i', v_j']$ есть тождественный нуль.

Заметим также, что "нетривиальные" (т.е. с номерами $\geq k+1$) компоненты формальных векторных полей $v_1', \ldots, v_k'$ не имеют постоянных членов, так как по нашему соглашению вектора $v_1'(0), \ldots,$

$v'_k(0)$ порождают подпространство $\mathbb{K}^n$ натянутое на первые k векторов стандартного базиса.

Теперь мы, для удобства, немного изменим обозначения:

1. Переменные $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ будут обозначаться через $x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^{n-k}$.

2. Латинские индексы будут использоваться для переменных x, а греческие — для переменных y.

3. Нетривиальные компоненты $(v')_i^{k+1}, \ldots, (v')_i^n$ формального векторного поля v'_i будут обозначаться через $u_i^1, \ldots, u_i^{n-k}$ (верхние индексы будут греческими). Таким образом,

$$\Xi' = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & u_1^1 & \ldots & u_1^{n-k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & u_k^1 & \ldots & u_k^{n-k} \end{pmatrix}.$$

Тот факт, что формальные векторные поля v'_i и v'_j коммутируют записывается в координатах (с учетом новых обозначений) следующим образом:

$$(\partial_{x^j} u_i^\alpha + u_j^\gamma \partial_{y^\gamma} u_i^\alpha) - (\partial_{x^i} u_j^\alpha + u_i^\gamma \partial_{y^\gamma} u_j^\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n-k. \quad (1.6)$$

Таким образом, наша цель — доказать, что интегрируемость распределения $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v'_1, \ldots, v'_k\}$ эквивалентна условию (1.6).

Формальный ряд F является интегралом распределения $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда

$$\Xi' dF = 0.$$

Анализ этого матричного уравнения в нуле показывает, что без ограничения общности мы можем искать формальные интегралы в следующем виде:

$$F = y^\beta + G(x, y), \quad \text{где } G(0, y) = 0.$$

Ясно, что полученные таким образом $(n-k)$ формальных интегралов будут автоматически иметь независимые в нуле дифференциалы, что будет означать интегрируемость распределения. Формальное дифференциальное уравнение на G в координатах имеет следующий вид:

$$\partial_{x^i} G + u_i^\alpha \partial_{y^\alpha} G + u_i^\beta = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \quad (1.7)$$

С дифференциально геометрической точки зрения (1.7) — это система дифференциальных уравнений в частных производных, которая, при выполнении некоторых условий совместности (которые как раз эквивалентны тому, что векторные поля, определяющее распределение, коммутируют), может быть решена методом характеристик. Однако, в нашем "формальном" случае мы, конечно, не можем использовать эти соображения. На самом деле, формальный случай оказывается даже проще гладкого: после некоторой подготовительной работы, уравнения (1.7) записываются в виде бесконечной системы линейных уравнений с блочно-треугольной матрицей, которая может быть легко решена при помощи рекурсии.

С этого момента мы будем использовать только линейную алгебру.

Для пространства формальных рядов, через $F^{(m)}$ мы будем обозначать стандартную проекцию ряда F на подпространство полиномов степени $\leq m$. Легко проверить, что эта стандартная проекция обладает следующими простыми свойствами:

(a) $(F^{(m+r)})^{(m)} = F^{(m)}$, для $r \geq 0$;

(b) $\partial_{x^i} F^{(m)} = (\partial_{x^i} F)^{(m-1)}$;

(c) $(u_i^\alpha F)^{(m)} = (u_i^\alpha F^{(m-1)})^{(m)}$ (так как u_i^α начинается с линейных членов);

(d) $(u_i^\alpha \partial_{x^j} F)^{(m)} = (u_i^\alpha \partial_{x^j} F^{(m)})^{(m)}$ (по той же причине).

С учетом этих свойств не трудно показать, что система (1.7), после применения оператора проецирования, имеет следующий вид:

$$\partial_{x^i} G^{(m)} = -(u_i^\alpha (\partial_{y^\alpha} G + \delta_\alpha^\beta))^{(m-1)}, \tag{1.8}$$

или

$$\partial_{x^i} G^{(m)} = -(u_i^\alpha (\partial_{y^\alpha} G^{(m-1)} + \delta_\alpha^\beta))^{(m-1)}, \tag{1.9}$$

или, что тоже самое,

$$\partial_{x^i} G^{(m)} = -(u_i^\alpha (\partial_{y^\alpha} G^{(m)} + \delta_\alpha^\beta))^{(m-1)}. \tag{1.10}$$

Уравнение (1.9) показывает, что система (1.7) имеет очень простую структуру: если мы решаем ее последовательно (т.е. сначала для

$m = 1$, потом для $m = 2$, затем 3, 4 и так далее), то на каждом следующем шаге наша система записывается так:

$$\partial_{x^i} G^{(m)} = P_i(x, y),$$

где полином $P_i(x, y)$ уже известен из предыдущего шага.

Лемма 2. *Пусть нам дана система уравнений $\partial_{x^i} f(x, y) = P_i(x, y)$, $i = 1, \ldots, k$, где $P_i(x, y)$ известные полиномы и $f(x, y)$ удовлетворяет начальному условию $f(0, y) = 0$. Тогда*

1. *Решение системы существует тогда и только тогда, когда выполнены условия совместности $\partial_{x^j} P_i(x, y) = \partial_{x^i} P_j(x, y)$;*

2. *Если решение существует, то оно единственно.*

Очевидно, что это утверждение имеет чисто алгебраическую природу и поэтому не зависит от поля $\mathbb{K}$. Для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Лемма 2 хорошо известна, следовательно, она верна и для любого поля нулевой характеристики.

Важно отметить, что если $G^{(m)}$ — решение системы (1.9), то начальный отрезок степени $m - 1$ этого полинома является решением системы (1.9) на предыдущем шаге (следствие леммы 2).

Выполнение условий совместности для системы (1.9) эквивалентно существованию и единственности $G^{(m)}$ для каждого m, т.е. существованию и единственности G как формального ряда. Таким образом, для доказательства теоремы, нам нужно только проверить, что условие коммутативности формальных векторных полей (1.6) выполнено тогда и только тогда, когда система (1.9) удовлетворяет условиям совместности

$$\partial_{x^j} \left(u_i^{\alpha} (\partial_{y^\alpha} G^{(m-1)} + \delta_\alpha^\beta) \right)^{(m-1)} = \partial_{x^i} \left(u_j^{\alpha} (\partial_{y^\alpha} G^{(m-1)} + \delta_\alpha^\beta) \right)^{(m-1)}.$$

Здесь мы рассматриваем полином $G^{(m-1)}$ как известную функцию, которая, кроме того, удовлетворяет (1.9) где m заменено на $m-1$. В последующих вычислениях мы будем использовать свойства (a)–(d) и (1.9) в эквивалентной форме (1.10). Имеем:

$$
\begin{aligned}
&\partial_{x^j}\left(u_i^\alpha(\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}+\delta_\alpha^\beta)\right)^{(m-1)}=\left(\partial_{x^j}\left(u_i^\alpha\left(\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}+\delta_\alpha^\beta\right)\right)\right)^{(m-2)}\\
&=\left(\partial_{x^j}u_i^\alpha(\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}+\delta_\alpha^\beta)+u_i^\alpha\partial_{x^j}\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}\right)^{(m-2)}\\
&=\left(\partial_{x^j}u_i^\alpha\left(\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}+\delta_\alpha^\beta\right)+u_i^\alpha\partial_{y^\alpha}\partial_{x^j}G^{(m-1)}\right)^{(m-2)}\\
&=\left(\partial_{x^j}u_i^\alpha\left(\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}+\delta_\alpha^\beta\right)-u_i^\alpha\partial_{y^\alpha}(u_j^\gamma(\partial_{y^\gamma}G^{(m-1)}+\delta_\gamma^\beta))^{(m-2)}\right)^{(m-2)}\\
&=\left(\partial_{x^j}u_i^\alpha\left(\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}+\delta_\alpha^\beta\right)-u_i^\alpha\partial_{y^\alpha}(u_j^\gamma(\partial_{y^\gamma}G^{(m-1)}+\delta_\gamma^\beta))\right)^{(m-2)}\\
&=\left(\partial_{x^j}u_i^\alpha\left(\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}+\delta_\alpha^\beta\right)-u_i^\alpha\partial_{y^\alpha}u_j^\gamma(\partial_{y^\gamma}G^{(m-1)}+\delta_\gamma^\beta)-u_i^\alpha u_j^\gamma\partial_{y^\alpha}\partial_{y^\gamma}G^{(m-1)}\right)^{(m-2)}\\
&=\left(\partial_{x^j}u_i^\alpha\left(\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}+\delta_\alpha^\beta\right)-u_i^\gamma\partial_{y^\gamma}u_j^\alpha(\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}+\delta_\alpha^\beta)-u_i^\gamma u_j^\alpha\partial_{y^\gamma}\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}\right)^{(m-2)}\\
&=\left((\partial_{x^j}u_i^\alpha-u_i^\gamma\partial_{y^\gamma}u_j^\alpha)\left(\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}+\delta_\alpha^\beta\right)-u_i^\gamma u_j^\alpha\partial_{y^\gamma}\partial_{y^\alpha}G^{(m-1)}\right)^{(m-2)}.
\end{aligned}
$$

Мы хотим, чтобы это выражение было симметричным по i и j. Последнее слагаемое, очевидно, симметрично. Поэтому для выполнения условий совместности необходимо достаточно чтобы

$$\partial_{x^j}u_i^\alpha-u_i^\gamma\partial_{y^\gamma}u_j^\alpha=\partial_{x^i}u_j^\alpha-u_j^\gamma\partial_{y^\gamma}u_i^\alpha.$$

Но это условие в точности совпадает с (1.6) и просто означает, что формальные векторные поля v_i' и v_j' коммутируют. Это завершает доказательство формальной теоремы Фробениуса. □

Замечание 3. Приведенное доказательство формальной теоремы Фробениуса является конструктивным: оно предъявляет алгоритм построения формальных интегралов распределения, который приводит к успеху при выполнении некоторых условий совместности (т.е. когда формальные векторные поля, определяющие распределение, коммутируют).

1.5.2 Формальные инварианты представлений

Пусть $R : G \to GL(V)$ — произвольное конечномерное представление группы Ли G в линейном пространстве V. Функция f называется инвариантом представления R, если она постоянна на орбитах этого представления, т.е. $f(R(g)x) = f(x)$ для всех $g \in G$, $x \in V$. Представление группы Ли G индуцирует представление ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $d_eR = \rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Пусть $\rho(\xi_i)e_j = a_{ij}^k e_k$, где $\{e_i\}$ — базис V, а $\{\xi_i\}$ — базис $\mathfrak{g}$. Функция f является инвариантом представления R тогда и только тогда, когда

$$a_{ij}^k x_j \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}. \tag{1.11}$$

Замечание 4. Если $R = \mathrm{Ad}^*$ — коприсоединенное представление, то $\rho = \mathrm{ad}^*$ и $a_{ij}^k = -c_{ik}^j$, где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно базиса $\{\xi_i\}$, т.е. $[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k$. В этом случае система уравнений (1.11) совпадает с системой (1.1), определяющей инварианты коприсоединенного представления.

Систему уравнений (1.11) можно переписать в инвариантном виде:

$$\langle d_x f, \rho(\xi)x\rangle = 0, \quad \text{для всех } \xi \in \mathfrak{g}.$$

Это приводит к следующему естественному определению.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики и $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ ее любое конечномерное представление в линейном пространстве V, $\dim \mathfrak{g} = m$, $\dim V = n$.

Определение 8. Формальный ряд $F \in \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$ называется формальным инвариантом представления ρ в точке $a \in V$, если для всех $\xi \in \mathfrak{g}$ выполнено следующее формальное тождество:

$$\langle d_x F, \rho(\xi)(a + x)\rangle = 0. \tag{1.12}$$

Замечание 5. Пусть $F(x) = f_0 + f_1(x) + f_2(x) + \ldots$, где $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ однородный полином степени i. Тогда левую часть (1.12) можно переписать следующим образом:

$$\langle d_x F, \rho(\xi)(a + x)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{\infty} d_x f_i, \rho(\xi)a + \rho(\xi)x\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\langle d_x f_i, \rho(\xi)a\rangle + \langle d_x f_{i-1}, \rho(\xi)x\rangle\right).$$

Выражение под знаком суммы есть однородный полином степени $i-1$. Поэтому левая часть (1.12) является корректно определенным формальным рядом по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и, следовательно, (1.12) корректно определенное формальное тождество.

Легко проверить, что если F — формальный инвариант, то его дифференциал в нуле $df_1 \in V^*$ всегда ортогонален подпространству $V_a = \{\rho(\xi)a \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$, т.е. для всех $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\langle df_1, \rho(\xi)a \rangle = 0.$$

Напомним, что элемент $a \in V$ называется регулярным, если его стационарная подалгебра $\mathrm{St}(a) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \rho(\xi)a = 0\}$ имеет минимальную размерность. Множество регулярных элементов открыто и всюду плотно в V.

Замечание 6. Всюду далее, если не оговорено противное, все топологические понятия типа открытости (замкнутости) множества или непрерывности отображения понимаются в смысле топологии Зариского. Напомним, что в этой топологии выражение "для почти всех x" означает, что x принадлежит дополнению к алгебраическому многообразию положительной коразмерности.

Следующее утверждение является следствием формальной теоремы Фробениуса.

Теорема 8. *Для любого представления $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ и любого регулярного элемента $a \in V$ существует набор $\{F^{(1)}, \ldots, F^{(s)}\}$ из $s = \dim V - \dim \mathfrak{g} + \dim \mathrm{St}(a)$ формальных инвариантов представления ρ в точке a, дифференциалы которых в нуле линейно независимы.*

Следствие 1. *Дифференциалы формальных инвариантов в нуле образуют базис в ортогональном дополнении к подпространству $V_a = \{\rho(\xi)a \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$.*

Действительно, $df_1^{(1)}, \ldots, df_1^{(s)}$ линейно независимы и, следовательно,

$$\dim \operatorname{span} \{df_1^{(1)}, \ldots, df_1^{(s)}\} = s.$$

Кроме того, $df_1^{(j)} \in V_a^{\perp}$ для всех $j = 1, \ldots, s$, поэтому

$$\operatorname{span} \{df_1^{(1)}, \ldots, df_1^{(s)}\} \subset V_a^{\perp}.$$

Остается заметить, что

$$\dim V_a^{\perp} = \dim V - \operatorname{codim} \mathrm{St}(a) = s.$$

Доказательство. Пусть $a \in V$ регулярный элемент и $\operatorname{codim} \mathrm{St}(a) = k$. Для того чтобы доказать теорему, достаточно построить k полиномиальных векторных полей $v_1, \dots, v_k$ на V, удовлетворяющих следующим условиям:

(a) Вектора $v_1(0), \dots, v_k(0)$ линейно независимы;

(b) Все формальные коммутаторы $[v_i, v_j]$ линейно выражаются через $v_1, \dots, v_k$ с коэффициентами из $\mathbb{K}[[V]]$;

(c) $\operatorname{span}\{v_1(x), \dots, v_k(x)\} = V_{a+x}$, для почти всех $x \in V$.

Действительно, из (a), (b) и формальной теоремы Фробениуса следует, что формальное распределение $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ интегрируемо, т.е. существуют $s = n - k$ формальных рядов $F^{(1)}, \dots, F^{(s)}$ таких, что

$$\langle d_x F^{(i)}, v_j(x) \rangle = 0,$$

для всех $i = 1, \dots, s$ и $j = 1, \dots, k$. Свойство (c) гарантирует, что все формальные ряды $F^{(1)}, \dots, F^{(s)}$, на самом деле, являются формальными инвариантами представления ρ в точке a. Из формальной теоремы Фробениуса следует также, что дифференциалы $d_x F^{(1)}, \dots, d_x F^{(s)}$ линейно независимы в нуле.

Обозначим через $\mathfrak{h}$ подпространство алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такое, что

$$\mathfrak{g} = \mathrm{St}(a) \oplus \mathfrak{h},$$

и пусть $h_1, \dots, h_k$ какой-нибудь базис в $\mathfrak{h}$. Определим k векторных полей на V следующим образом:

$$v_i(x) = \rho(h_i)(a + x), \quad i = 1, \dots k. \tag{1.13}$$

Покажем, что эти векторные поля удовлетворяют условиям (a), (b), (c).

Лемма 3. *Вектора $v_1(0), \dots, v_k(0)$ линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, что это утверждение не верно, т.е. вектора $\rho(h_i)a$ линейно зависимы. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация $\rho(h_i)a$ равная нулю, $\alpha_1\rho(h_1)a+\ldots+\alpha_k\rho(h_k)a = 0$. Отсюда следует, что $\sum \alpha_i h_i \in \mathrm{St}(a)$. Противоречие. $\square$

Лемма 4. *Пусть $H_1, \ldots, H_k$ — линейные операторы на векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$. Предположим, что существует элемент $a \in V$ такой, что вектора $H_1a, \ldots, H_ka$ линейно независимы. Тогда для почти всех $x \in V$ вектора $H_1x, \ldots, H_kx$ линейно независимы.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $W = V \times V \times \ldots \times V$ (k раз) и отображение $H : V \to W$, $x \mapsto (H_1x, \ldots, H_kx)$. Очевидно, что это линейное и, следовательно, непрерывное (в топологии Зарисского) отображение. Рассмотрим подмножество $W_0 \subset W$, состоящее из всех наборов из k линейно независимых векторов. Так как условие линейной зависимости можно записать в виде системы полиномиальных уравнений, то подмножество W_0 открыто. Следовательно, прообраз $H^{-1}(W_0)$ открыт в V. По условию леммы $Ha \in W_0$, т.е. множество $H^{-1}(W_0)$ не пусто. Таким образом, $H^{-1}(W_0)$ является дополнением к алгебраическому многообразию положительной коразмерности, что и требовалось доказать. $\square$

Для почти всех $x \in V$ (когда $a + x$ регулярен) подпространство V_{a+x} имеет максимальную размерность $\dim V_{a+x} = k$ и, по определению, $v_i(x) \in V_{a+x}$. В силу Леммы 3, линейные операторы $H_i = \rho(h_i)$ удовлетворяют условиям леммы 4. Следовательно, для почти всех $x \in V$ вектора $v_1(x), \ldots, v_k(x)$ линейно независимы и образуют базис V_{a+x}. Таким образом, свойство (c) доказано.

Дополним векторы $h_1, \ldots, h_k$ до базиса $\xi_1 = h_1, \ldots, \xi_k = h_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_m$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Например, любой базис в $\mathrm{St}(a)$ может быть выбран в качестве векторов $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_m$. Определим векторные поля $v_{k+1}, \ldots, v_m$ на V аналогично (1.13):

$$v_j(x) = \rho(\xi_j)(a + x), \quad j = k + 1, \ldots m.$$

Лемма 5. *Существуют формальные ряды $R_j^i \in \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$ такие, что*

$$v_j(x) = R_j^1(x)v_1(x) + \cdots + R_j^k(x)v_k(x), \quad j = k + 1, \ldots, m. \tag{1.14}$$

Доказательство. Так как $\dim \operatorname{span}\{v_1(x), \ldots, v_n(x)\} = \dim V_{a+x} = k$ почти всюду на V, то существуют рациональные функции R^i_j, удовлетворяющие (1.14). С другой стороны, эти рациональные функции хорошо определены в $x = 0$ и поэтому могут быть представлены в виде формальных рядов. $\square$

Прямое вычисление показывает, что отображение $\xi \mapsto \rho(\xi)(x+a)$ является антигомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли формальных векторных полей на V, т.е.

$$[v_i(x), v_j(x)] = -\rho([\xi_i, \xi_j])(a + x).$$

Теперь, пользуясь леммой 5, будем иметь:

$$\begin{aligned}
&[v_i(x), v_j(x)] = -\rho([\xi_i, \xi_j])(a + x) \\
&= -\rho\left(\sum_{\alpha=1}^{m} c^{\alpha}_{ij}\xi_\alpha\right)(a + x) = -\sum_{\alpha=1}^{m} c^{\alpha}_{ij}\rho(\xi_\alpha)(a + x) \\
&= -\sum_{\alpha=1}^{m} c^{\alpha}_{ij}v_\alpha(x) = -\sum_{\alpha=1}^{k} c^{\alpha}_{ij}v_\alpha(x) - \sum_{\alpha=k+1}^{m} c^{\alpha}_{ij}v_\alpha(x) \\
&= -\sum_{\alpha=1}^{k} c^{\alpha}_{ij}v_\alpha(x) - \sum_{\alpha=k+1}^{m} c^{\alpha}_{ij}\sum_{\beta=1}^{k} R^{\beta}_{\alpha}(x)v_\beta(x) \\
&= -\sum_{\alpha=1}^{k} c^{\alpha}_{ij}v_\alpha(x) - \sum_{\beta=k+1}^{m} c^{\beta}_{ij}\sum_{\alpha=1}^{k} R^{\alpha}_{\beta}(x)v_\alpha(x) \\
&= -\sum_{\alpha=1}^{k}\left(c^{\alpha}_{ij} - \sum_{\beta=k+1}^{m} c^{\beta}_{ij}R^{\alpha}_{\beta}(x)\right)v_\alpha(x).
\end{aligned}$$

Так как $c^{\alpha}_{ij} \in \mathbb{K}$ константы, то коэффициенты при $v_\alpha(x)$ являются хорошо определенными формальными рядами. Таким образом, свойство (b), а вместе с ним и Теорема 8, доказаны. $\square$

Замечание 7. Доказательство формальной теоремы Фробениуса позволяет последовательно находить однородные части формальных инвариантов представлений любого конечного порядка путем решения системы линейных уравнений.

Пример 4. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ с базисом

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и ее естественное представление $\rho = \mathrm{id} : \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^3)$, или, другими словами, стандартное действие на $\mathbb{R}^3$. Пусть $a \in \mathbb{R}^3$ регулярный элемент, тогда его стационарная подалгебра имеет следующий вид:

$$\mathrm{St}(a) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_3}{a_1} & \frac{a_2}{a_1} \\ \frac{a_3}{a_1} & 0 & 1 \\ -\frac{a_2}{a_1} & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \mathrm{St}(a) = 1.$$

Подпространство, натянутое на вектора e_2 и e_3, может быть выбрано в качестве подпространства $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ такого, что $\mathfrak{g} = \mathrm{St}(a) \oplus \mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{e_2, e_3\}, \quad \dim \mathfrak{h} = 2.$$

Точка $a = (1, 0, 0)$ является регулярной. Формальные инварианты представления ρ точке a — это в точности формальные интегралы интегрируемого распределения $\mathcal{D} = \mathrm{span}\{v_2, v_3\}$, где

$$v_2(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad v_3(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 + 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Единственный формальный инвариант можно вычислить следуя алгоритму приведенному в доказательстве Теоремы 7:

$$F = x_1 + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) - \frac{1}{2}x_1(x_2^2 + x_3^2) + \ldots$$

Отметим, что ряд F — это (с точностью до свободного члена) ряд Тейлора в нуле функции $I_a(x) = I(x + a)$, где $I(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ — хорошо известный инвариант стандартного представления группы Ли $SO(3, \mathbb{R}) \hookrightarrow GL(\mathbb{R}^3)$.

1.5.3 Определение и коммутативность $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики рассмотрим ее коприсоединенное представление $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$. Пусть $a \in \mathfrak{g}^*$ — регулярный элемент, т.е. его аннулятор $\mathrm{Ann}(a) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}^*_\xi a = 0\}$ имеет минимальную размерность $s = \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}$. Тогда, по Теореме 8 о формальных инвариантах, существует s формальных рядов $F^{(1)}, \dots, F^{(s)} \in \mathbb{K}[[\mathfrak{g}^*]]$ таких, что для всех $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\langle d_x F^{(j)}, \mathrm{ad}^*_\xi (a+x)\rangle = 0. \tag{1.15}$$

Кроме того, дифференциалы $dF^{(1)}, \dots, dF^{(s)}$ линейно независимы в нуле и образуют базис в $\mathrm{Ann}(a)$. Пусть $F^{(j)} = f_1^{(j)} + f_2^{(j)} + \dots$, где $f_i^{(j)} \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$ есть однородный полином степени i. Тогда (1.15) можно эквивалентным образом переписать на языке полиномов:

$$\mathrm{span}\,\{df_1^{(1)}, \dots df_1^{(s)}\} = \mathrm{Ann}(a), \tag{1.16}$$

$$\mathrm{ad}^*_{df_{i+1}^{(j)}} a + \mathrm{ad}^*_{df_i^{(j)}} x = 0, \tag{1.17}$$

для $i = 1, 2, \dots$ и $j = 1, \dots, s$. Пусть $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ обозначает подмножество в пуассоновой алгебре $P(\mathfrak{g})$, состоящее из всех этих полиномов,

$$\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g})) = \{f_i^{(j)} \mid j = 1, \dots, s,\ i = 1, 2, \dots\} \subset P(\mathfrak{g}). \tag{1.18}$$

Замечание 8. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то ряд F, удовлетворяющий тождеству (1.15), является рядом Тейлора в нуле функции $f_a(x) = f(a+x)$, где $f(x) \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ — локально аналитический инвариант коприсоединенного представления. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ алгебраическая, то ряд F, удовлетворяющий тождеству (1.15), является формальным рядом Тейлора (построенным при помощи конструкции, описанной в разделе 1.4.1) рациональной функции $f_a(x) = f(a+x)$, где $f(x)$ — рациональный инвариант. В этих случаях набор полиномов $\mathcal{F}_a$ с точки зрения функциональной зависимости эквивалентен семейству сдвигов инвариантов $\{f(x+\lambda a) \mid f \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}), \lambda \in \mathbb{K}\}$, см. [23]. Поэтому мы будем говорить, что набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g})) \subset P(\mathfrak{g})$ получен формальным методом сдвига аргумента.

Следующее утверждение является переформулировкой теоремы о коммутативности сдвигов инвариантов коприсоединенного представления, доказанной А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в [23].

Теорема 9. *Набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ коммутативен.*

Доказательство. Пусть $f_i^{(\alpha)}, f_j^{(\beta)} \in \mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$, тогда, используя (1.16) и (1.17), будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&\{f_i^{(\alpha)}, f_j^{(\beta)}\}(x) = \langle x, [df_i^{(\alpha)}, df_j^{(\beta)}]\rangle = (\mathrm{ad}^*_{df_j^{(\beta)}} x) df_i^{(\alpha)} \\
&= -(\mathrm{ad}^*_{df_{j+1}^{(\beta)}} a) df_i^{(\alpha)} = (\mathrm{ad}^*_{df_i^{(\alpha)}} a) df_{j+1}^{(\beta)} = -(\mathrm{ad}^*_{df_{i-1}^{(\alpha)}} x) df_{j+1}^{(\beta)} \\
&= (\mathrm{ad}^*_{df_{j+1}^{(\beta)}} x) df_{i-1}^{(\alpha)} = \{f_{i-1}^{(\alpha)}, f_{j+1}^{(\beta)}\}(x) = \ldots = \{f_1^{(\alpha)}, f_{i+j-1}^{(\beta)}\}(x) \\
&= (\mathrm{ad}^*_{df_{i+j-1}^{(\beta)}} x) df_1^{(\alpha)} = -(\mathrm{ad}^*_{df_{i+j}^{(\beta)}} a) df_1^{(\alpha)} = (\mathrm{ad}^*_{df_1^{(\alpha)}} a) df_{i+j}^{(\beta)} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Теорема доказана. □

Замечание 9. На самом деле, коммутативность набора $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ следует из более общей и очень важной конструкции, называемой схемой Ленара [49]. Пусть $\{\cdot,\cdot\}_1$ и $\{\cdot,\cdot\}_2$ две согласованные скобки Пуассона, т.е. каждая линейная комбинация $\alpha\{\cdot,\cdot\}_1 + \beta\{\cdot,\cdot\}_2$ снова является скобкой Пуассона. Последовательность функций $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ называется бигамильтоновой иерархией, если

$$\{f_i, \cdot\}_1 = -\{f_{i+1}, \cdot\}_2.$$

На $S(\mathfrak{g})$ вместе со стандартной скобкой Ли-Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ мы можем рассмотреть скобку $\{\cdot,\cdot\}_a$, полученную “замораживанием аргумента”:

$$\{f, g\}_a = c_{ij}^k a_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad f, g \in S(\mathfrak{g}).$$

Прямое вычисление показывает, что скобки $\{\cdot,\cdot\}$ и $\{\cdot,\cdot\}_a$ согласованы. Соотношения (1.16) и (1.17), в сущности, означают, что полиномы $\{f_i^{(j)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ формируют бигамильтонову иерархию для всех $j = 1, \ldots, s$, причем $f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(s)}$ являются функциями Казимира скобки $\{\cdot,\cdot\}_a$:

$$\{f_1^{(j)}, \cdot\}_a = 0, \tag{1.16'}$$

$$\{f_{i+1}^{(j)}, \cdot\}_a + \{f_i^{(j)}, \cdot\} = 0. \tag{1.17'}$$

Таким образом, набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ состоит из s различных бигамильтоновых иерархий. Если $f_i^{(\alpha)}, f_j^{(\beta)} \in \mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$, то

$$
\begin{aligned}
&\{f_i^{(\alpha)}, f_j^{(\beta)}\} = -\{f_{i+1}^{(\alpha)}, f_j^{(\beta)}\}_a = \{f_{i+1}^{(\alpha)}, f_{j-1}^{(\beta)}\} \\
&= -\{f_{i+2}^{(\alpha)}, f_{j-1}^{(\beta)}\}_a = \ldots = -\{f_{i+j}^{(\alpha)}, f_1^{(\beta)}\}_a = 0.
\end{aligned}
$$

Вычисления в (1.19) — это в точности подробно расписанная последняя цепочка равенств.

Замечание 10. Из доказательства формальной теоремы Фробениуса следует, что набор полиномов $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ можно строить следующим "каноническим" способом. Возьмем любой линейный полином $f_1 \in \mathrm{Ann}(a)$. Тогда решение системы (набор полиномов $f_2, f_3, \ldots \in P(\mathfrak{g})$, $\deg f_i = i$)

$$\mathrm{ad}^*_{df_{i+1}} a + \mathrm{ad}^*_{df_i} x = 0,$$

с начальным условием

$$\pi \circ f_i \equiv 0, \quad i \geq 2,$$

где $\pi : \mathrm{Ann}^*(a) \to \mathfrak{g}^*$ стандартная проекция, существует и единственно. Таким образом можно построить $\dim \mathrm{Ann}(a)$ различных иерархий, составляющих $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$.

Для доказательства критерия полноты набора $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ нам потребуются два утверждения из линейной алгебры.

1.5.4 Лемма об иерархии, порождаемой парой билинейных форм

Пусть V — конечномерное пространство над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики, $\dim V = n$, и $\mathcal{S}$ — двумерное линейное семейство билинейных форм на V, порожденное двумя фиксированными формами A_1 и A_2, $\mathcal{S} = \mathrm{span}\{A_1, A_2\}$. Выделим в семействе $\mathcal{S}$ подмножество $\mathcal{S}_0$ форм общего положения, т.е. форм максимального ранга $R_0 = \max\limits_{A \in \mathcal{S}} \mathrm{rank}\, A$. Обозначим через L_0 подпространство в V, порожденное ядрами форм общего положения:

$$L_0 = \mathrm{span}\, \{\mathrm{Ker}\ A,\ A \in \mathcal{S}_0\}.$$

Предположим, что A_1 является формой общего положения, т.е. $A_1 \in \mathcal{S}_0$, и векторы $e_1^0, \ldots, e_r^0$ образуют базис в $\mathrm{Ker}\ A_1$. Пусть векторы e_i^j удовлетворяют рекурентным соотношениям

$$A_1(e_i^0) = 0, \quad A_1(e_i^1) = A_2(e_i^0), \quad A_1(e_i^2) = A_2(e_i^1), \quad \ldots \tag{1.20}$$

Последовательность векторов $\{e_i^0, e_i^1, \ldots\}$, определенная этой процедурой, называется иерархией, порожденной парой форм A_1 и A_2.

Обозначим через L' подпространство, порожденное векторами всех r иерархий:

$$L' = \mathrm{span}\,\{e_i^j;\ i = 1, \ldots, r,\ j = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Лемма 6. *$L' = L_0$.*

Доказательство. Сначала мы докажем по индукции, что векторы каждой иерархии $\{e^j, j = 0, 1, \ldots\}$ принадлежат подпространству L_0 и, следовательно, $L' \subset L_0$. Базис индукции очевиден: $e^0 \in L_0$ так как $e^0 \in \mathrm{Ker}\, A_1$ и $A_1 \in \mathcal{S}_0$. Предположим, что $e^j \in L_0$, тогда существуют векторы $v_1, \ldots, v_m$ такие, что $e^j = v_1 + \ldots + v_m$ и $v_i \in \mathrm{Ker}\,(A_2 + \lambda_i A_1) \subset L_0$. Используя иерархическое свойство (1.20):

$$A_1(e^{j+1}) = A_2(e^j) = A_2(v_1 + \ldots + v_m) = -\lambda_1 A_1(v_1) - \ldots - \lambda_m A_1(v_m).$$

Это означает, что $e^{j+1} + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in \mathrm{Ker}\, A_1$ и, следовательно, $e^{j+1} \in L_0$.

Для того чтобы доказать обратное включение, покажем сначала, что для любого $\lambda \in \mathbb{K}$

$$A_1(L') = (A_2 + \lambda A_1)(L'). \tag{1.21}$$

Для любого вектора e^j иерархии $(A_2 + \lambda A_1)(e^j) = A_1(e^{j+1} + \lambda e^j) \in A_1(L')$, поэтому $(A_2 + \lambda A_1)(L') \subset A_1(L')$. Пусть вектора $e^0, e^1, \ldots, e^l$ образуют базис подпространства $\mathrm{span}\,\{e^j, j = 0, 1, \ldots\} \subset L'$. Легко проверить, что для каждого базисного вектора e^j существует вектор $w = \sum_{i=0}^{l} \alpha_i e^i \in L'$ такой, что

$$A_1(e^j) = (A_2 + \lambda A_1)(w). \tag{1.22}$$

Действительно:

$$\begin{aligned}
(A_2 + \lambda A_1)(w) &= \sum_{i=0}^{l} \alpha_i A_2(e^i) + \lambda \sum_{i=1}^{l} \alpha_i A_1(e^i) \\
&= \sum_{i=0}^{l} \alpha_i A_1(e^{i+1}) + \lambda \sum_{i=1}^{l} \alpha_i A_1(e^i) = \sum_{i=1}^{l} (\alpha_{i-1} + \lambda \alpha_i) A_1(e^i) + \alpha_l A_1(e^{l+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{l} (\alpha_{i-1} + \lambda \alpha_i + \alpha_l \beta_i) A_1(e^i),
\end{aligned}$$

где $(\beta_i)_{i=0}^l$ — координаты вектора e^{l+1} в базисе $\{e^i\}_{i=0}^l$. Таком образом, для того, чтобы выполнялось (1.22) достаточно найти $\alpha_0, \ldots, \alpha_{l-1}$ (с $\alpha_l = 1$) такие, что

$$\alpha_{i-1} + \lambda\alpha_i + \beta_i = \delta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Эта линейная система, очевидно, имеет решение (т.к. ее матрица невырождена). Итак, (1.21) доказано. Отсюда сразу следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\dim \operatorname{Ker} A_1 = \dim(L' \cap \operatorname{Ker} A_1) = \dim(L' \cap \operatorname{Ker} (A_2 + \lambda A_1)).$$

В первом равенстве мы пользовались тем, что $\operatorname{Ker} A_1 \subset L'$, а во втором использовали (1.21) и следующий простой факт: для любого линейного оператора $A : V \to W$, $\dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A = \dim V$. Теперь если форма $A_2 + \lambda A_1$ в общем положении, то $\dim \operatorname{Ker} (A_2 + \lambda A_1) = \dim \operatorname{Ker} A_1$, поэтому $\operatorname{Ker} (A_2 + \lambda A_1) \subset L'$. Таким образом, $L_0 \subset L'$, что завершает доказательство леммы. □

1.5.5 Лемма о паре кососимметрических билинейных форм

Пусть, как и прежде, V — конечномерное пространство над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики, $\dim V = n$, (A_1, A_2) — пара билинейных форм на V, $\mathcal{S} = \operatorname{span}\{A_1, A_2\}$, $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ — подмножество форм максимального ранга. Только теперь предположим, что, во-первых, поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто и, во-вторых, формы A_1 и A_2 являются кососимметрическими.

Обозначим через L подпространство в V, порожденное ядрами всех нетривиальных форм, а через L_0 подпространство, порожденное ядрами форм общего положения:

$$L = \operatorname{span}\{\operatorname{Ker} A,\ A \in \mathcal{S} \setminus \{0\}\},$$

$$L_0 = \operatorname{span}\{\operatorname{Ker} A,\ A \in \mathcal{S}_0\}.$$

Пусть $\widetilde{L_0}$ — косоортогональное дополнение к L_0 в V относительное некоторой нетривиальной формы $B \in \mathcal{S}$:

$$\widetilde{L_0} = \{v \in V \mid B(v, L_0) = 0\}.$$

Лемма 7. *Пусть $C_1, \ldots, C_q \in \mathcal{S} \backslash \{0\}$ — все с точностью до пропорциональности формы немаксимального ранга. Пусть $A \in \mathcal{S}_0$ фиксированная форма максимального ранга R_0. Равенство $\widetilde{L_0} = L$ имеет место тогда и только тогда, когда* $\dim \mathrm{Ker}\ (A|_{\mathrm{Ker}\ C_i}) = n - R_0$. *В противном случае имеет место строгое включение $\widetilde{L_0} \subset L$.*

Замечание 11. В обозначениях леммы $L = L_0 + \sum\limits_{i=1}^{q} \mathrm{Ker}\ C_i$.

Оригинальное доказательство этого утверждения для комплексного случая $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, которое без труда переносится на случай произвольного алгебраически замкнутого поля, можно найти в работе [6]. Здесь мы приведем доказательство основанное на теореме о приведении пары кососимметрических форм к каноническому виду.

Пусть I_k обозначает единичную матрицу размера k, а $J_{k,\mu}$ — жорданову клетку размера k и собственным значением μ, где $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{K}$.

Теорема 10. *Любая пара (A_1, A_2) кососимметрических билинейных форм на конечномерном пространстве над алгебраически замкнутым полем может быть разложена в прямую сумму пар форм, каждая из которых изоморфна одной из следующих пар:*

1. $\mathcal{H}_{2k,\mu} = (H_1^{(k,\mu)}, H_2^{(k,\mu)})$, *где*

$$H_1^{(k,\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2^{(k,\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & J_{k,\mu} \\ -J_{k,\mu}^t & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathcal{H}_{2k,\infty} = (H_1^{(k,\infty)}, H_2^{(k,\infty)})$, *где*

$$H_1^{(k,\infty)} = \begin{pmatrix} 0 & J_{k,0} \\ -J_{k,0}^t & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2^{(k,\infty)} = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *Пара Кронекера $\mathcal{K}_{2k-1} = (K_1^{(2k-1)}, K_2^{(2k-1)})$. Эта пара форм определена на $(2k-1)$-мерном пространстве, в базисе $(v_0, \ldots, v_{2k-2})$ ненулевыми является только следующие спаривания:*

$$A_1(v_{2l}, v_{2l+1}) = 1 \quad A_2(v_{2l+1}, v_{2l+2}) = 1, \quad l = 0, \ldots, k-2.$$

Замечание 12. Этот замечательный алгебраический факт играет важную роль в теории бигамильтоновых систем (см. [39]). Его доказательство можно найти в работе И. М. Гельфанда и И. С. Захаревича [14], см. также [51]. В монографиях [13] и [52] дискуссия подходит очень близко, тем не менее, данное утверждение явно не формулируется.

Доказательство. Из теоремы 10 следует, что существует разложение пространства V:

$$V = U_1^{2m_1} \oplus \ldots \oplus U_s^{2m_s} \oplus W_1^{2k_1-1} \oplus \ldots \oplus W_r^{2k_r-1}$$

и базис на V

$$(\underbrace{e_1^1, \ldots, e_{2m_1}^1}_{U_1^{2m_1}}, \ldots, \underbrace{e_1^s, \ldots, e_{2m_s}^s}_{U_s^{2m_s}}, \underbrace{f_1^1, \ldots, f_{2k_1-1}^1}_{W_1^{2k_1-1}}, \ldots, \underbrace{f_1^r, \ldots, f_{2k_r-1}^r}_{W_r^{2k_r-1}}),$$

в котором формы A_1 и A_2 имеют следующий канонический вид :

$$A_1 = H_1^{(m_1,\mu_1)} \oplus \ldots \oplus H_1^{(m_s,\mu_s)} \oplus K_1^{(2k_1-1)} \oplus \ldots \oplus K_1^{(2k_r-1)},$$

$$A_2 = H_2^{(m_1,\mu_1)} \oplus \ldots \oplus H_2^{(m_s,\mu_s)} \oplus K_2^{(2k_1-1)} \oplus \ldots \oplus K_2^{(2k_r-1)},$$

где $\mu_i \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Ядро линейной комбинации $A_{\lambda_1,\lambda_2} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ в этом базисе записывается так:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ker}\ A_{\lambda_1,\lambda_2} \\ &= \mathrm{Ker}\ \left(\lambda_1 H_1^{(m_1,\mu_1)} + \lambda_2 H_2^{(m_1,\mu_1)}\right) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}\ \left(\lambda_1 K_1^{(2k_r-1)} + \lambda_2 K_2^{(2k_r-1)}\right). \end{aligned}$$

Прямым вычислением можно показать, что для любого $\mu \in \mathbb{K}$ ядро нетривиальной линейной комбинации

$$\mathrm{Ker}\ \left(\lambda_1 H_1^{(m,\mu)} + \lambda_2 H_2^{(m,\mu)}\right) = \begin{cases} \mathrm{span}\,\{e_m, e_{m+1}\}, & \text{если } (\lambda_1 : \lambda_2) = (-\mu : 1), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}\ \left(\lambda_1 H_1^{(m,\infty)} + \lambda_2 H_2^{(m,\infty)}\right) = \begin{cases} \mathrm{span}\,\{e_m, e_{m+1}\}, & \text{если } (\lambda_1 : \lambda_2) = (1 : 0), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому, для любого $\mu \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$

$$\mathrm{span}\ \left\{\mathrm{Ker}\ \left(\lambda_1 H_1^{(m,\mu)} + \lambda_2 H_2^{(m,\mu)}\right),\ \lambda \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}\right\} = \mathrm{span}\,\{e_m, e_{m+1}\}.$$

Далее, для любой кронекеровой пары $\mathcal{K}_{2k-1}$ нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1 K_1^{(2k-1)} + \lambda_2 K_2^{(2k-1)}$ всегда имеет одномерное ядро:

$$\mathrm{Ker}\ \left(\lambda_1 K_1^{(2k-1)} + \lambda_2 K_2^{(2k-1)}\right) = \mathrm{span}\,\{w_\lambda\},$$

$$w_\lambda = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^i f_{2i+1} = \left(1, 0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, 0, \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2, 0, \ldots, 0, \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{k-1}\right).$$

Кривая $\{w_\lambda, \lambda \in \mathbb{K}\mathrm{P}^1\}$ называется спектральной кривой пары $\mathcal{K}_{2k-1}$. Таким образом, подпространство $L \subset V$, порожденное всеми ядрами нетривиальных форм A_{λ_1,λ_2} имеет вид:

$$L = U_1^2 \oplus \ldots \oplus U_s^2 \oplus W_1^{k_1} \oplus \ldots \oplus W_r^{k_r}, \tag{1.23}$$

где

$$U_i^2 = \mathrm{span}\,\{e^i_{m_i}, e^i_{m_i+1}\} \subset U_i^{2m_i}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

$$W_i^{k_i} = \mathrm{span}\,\{f^i_1, f^i_3, \ldots, f^i_{2k_i-1}\} \subset W_i^{2k_i-1}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Рассмотрим теперь подпространство $L_0 \subset L$, порожденное ядрами форм общего положения. Из описания ядер линейных комбинаций форм, составляющих пары $\mathcal{H}_{2k,\mu}, \mathcal{H}_{2k,\infty}$ и $\mathcal{K}_{2k-1}$, следует, что ранг формы A_{λ_1,λ_2} может упасть только за счет пар первых двух типов. Для любого $\mu \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ ядро формы $\lambda_1 H_1^{(m,\mu)} + \lambda_2 H_2^{(m,\mu)}$ в общем положении тривиально. Обозначим через $\Lambda_i = (-\mu_i : 1)$ точку проективного пространства $\mathbb{K}\mathrm{P}^1$, в которой ядро формы $\lambda_1 H_1^{(m,\mu_i)} + \lambda_2 H_2^{(m,\mu_i)}$ вырождается в двумерное подпространство, тогда

$$L_0 = \mathrm{span}\,\{\mathrm{Ker}\ A_{\lambda_1,\lambda_2},\ \lambda \in \mathbb{K}\mathrm{P}^1 \setminus \cup_{i=1}^s \Lambda_i\} = W_1^{k_1} \oplus \ldots \oplus W_r^{k_r}. \tag{1.24}$$

Косоортогональное дополнение $\widetilde{L_0}$ к L_0 в V относительно некоторой нетривиальной формы $A_{\lambda_1,\lambda_2} \in \mathcal{S}$ имеет вид

$$\widetilde{L_0} = \{v \in V \mid A_{\lambda_1,\lambda_2}(v, L_0) = 0\} = U_1^{2m_1} \oplus \ldots \oplus U_s^{2m_s} \oplus \widetilde{W}_1 \oplus \ldots \oplus \widetilde{W}_r,$$

где $\widetilde{W}_i$ — косоортогональное дополнение к $W_i^{k_i}$ в $W_i^{2k_i-1}$.

В работе [14] доказано, что для любой пары кососимметрических форм (A_1, A_2) на конечномерном пространстве W существует представление этого пространства в виде $W = S \oplus T^*$, пара операторов

$X_1, X_2 : S \to T$ и линейное преобразование $P : W \to S \oplus T^*$ такие, что $A_i = P^* A_{X_i} P$, где

$$A_{X_i}(w_1, w_2) = A_{X_i}(s_1 + t_1^*, s_2 + t_2^*) = t_2^*(X_i s_1) - t_1^*(X_i s_2).$$

Более того, если пара (A_1, A_2) является парой Кронекера $\mathcal{K}_{2k-1}$, то пространство S совпадает с линейной оболочкой спектральной кривой, $S = \operatorname{span}\{w_\lambda\} = W^k$, а операторы $X_1, X_2 : W^k \to T$ сюръективны.

Пусть $\xi = \xi_{W^k} + \xi_{T^*} \in W^k \oplus T^* = W^{2k-1}$, тогда

$$A_{\lambda_1,\lambda_2}(\xi, W^k) = -\xi_{T^*}((\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)W^k) = 0 \;\Leftrightarrow\; \xi_{T^*} = 0.$$

Следовательно, $\widetilde{W_i} = W_i^{k_i}$ и

$$\widetilde{L_0} = U_1^{2m_1} \oplus \ldots \oplus U_s^{2m_s} \oplus W_1^{k_1} \oplus \ldots \oplus W_r^{k_r}. \tag{1.25}$$

Таким образом, $\widetilde{L_0}$ не зависит от выбора формы $A_{\lambda_1,\lambda_2} \in \mathcal{S}$. Из (1.23)–(1.25) следует, что подпространство L_0 является изотропным и $L_0 \subset L \subset \widetilde{L_0}$.

Количество q всех, с точностью до пропорциональности, форм семейства $\mathcal{S}$, которые имеют не максимальный ранг, не превосходит s и их список выглядит так:

$$C_i = \begin{cases} -\mu_i A_1 + A_2, & \text{если } \mu_i \in \mathbb{K}, \\ A_1, & \text{если } \mu_i = \infty. \end{cases} \quad i = 1, \ldots, s$$

Ядро формы C_i имеет следующий вид:

$$\operatorname{Ker} C_i = \bigoplus_{j:\mu_j=\mu_i} U_j^2 \oplus \operatorname{span}\{w_{\Lambda_i}^1\} \oplus \ldots \oplus \operatorname{span}\{w_{\Lambda_i}^r\}.$$

Из (1.23) и (1.25) следует, что $L = \widetilde{L_0}$ тогда и только тогда, когда $U_i^2 = U_i^{2m_i}$ для всех $i = 1, \ldots, s$, т.е. когда каноническое представление пары (A_1, A_2) содержит только пары следующих типов: $\mathcal{H}_{2,\mu}$, $\mathcal{H}_{2,\infty}$ и $\mathcal{K}_{2k-1}$.

Пусть теперь $A_{\lambda_1,\lambda_2} \in \mathcal{S}_0$ — форма общего положения. Тогда

$$\operatorname{Ker} A_{\lambda_1,\lambda_2} = \operatorname{span}\{w_\lambda^1\} \oplus \ldots \oplus \operatorname{span}\{w_\lambda^r\}.$$

Размерность ядра формы общего положения совпадает с числом пар Кронекера в каноническом представлении пары (A_1, A_2):

$$\dim \operatorname{Ker} A_{\lambda_1,\lambda_2} = r.$$

Рассмотрим теперь ядро ограничения формы A_{λ_1,λ_2} на $\operatorname{Ker} C_i$. Очевидно, $w^1_{\Lambda_i}, \dots, w^r_{\Lambda_i} \in \operatorname{Ker}\ (A_{\lambda_1,\lambda_2}|_{\operatorname{Ker} C_i})$, поэтому $\dim \operatorname{Ker}\ (A_{\lambda_1,\lambda_2}|_{\operatorname{Ker} C_i}) \geq r$. Кроме того,

$$A_{\lambda_1,\lambda_2}(e^i_{m_i}, e^i_{m_i+1}) = \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2\mu_i \ (= \lambda_2, \text{ если } \mu_i = \infty), & m_i = 1, \\ 0, & m_i \geq 2. \end{cases}$$

Следовательно, $\dim \operatorname{Ker}\ (A_{\lambda_1,\lambda_2}|_{\operatorname{Ker} C_i}) = r$ для всех $i = 1, \dots, s$ тогда и только тогда, когда в каноническом представлении пары (A_1, A_2) нет пар $\mathcal{H}_{2k,\mu}$, $\mathcal{H}_{2k,\infty}$ для всех $k \geq 2$.

Таким образом, окончательно получаем, что $L = \widetilde{L_0}$ тогда и только тогда, когда $\dim \operatorname{Ker}\ (A_{\lambda_1,\lambda_2}|_{\operatorname{Ker} C_i}) = r$ для всех $i = 1, \dots, s$. Остается заметить, что $r = n - R_0$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 2. $\operatorname{Ker} C_i \subset \widetilde{L_0}$ *для всех* $i = 1, \dots, q$.

Следствие 3. *Если все нетривиальные формы имеют максимальный ранг, т.е.* $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S} \setminus \{0\}$, *то* $\widetilde{L_0} = L = L_0$.

1.5.6 Критерий полноты $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$

Понятие полноты коммутативного набора полиномов $\mathcal{F} \subset P(\mathfrak{g}) = (S(\mathfrak{g}), \{\cdot,\cdot\})$, данное в Определении 1, имеет полезную геометрическую интерпретацию. Пусть $x \in \mathfrak{g}^*$ и $d_x\mathcal{F} \subset T^*_x(\mathfrak{g}^*) \cong \mathfrak{g}$ подпространство порожденное дифференциалами функций из $\mathcal{F}$:

$$d_x\mathcal{F} = \operatorname{span}\{df(x),\ f \in \mathcal{F}\}.$$

Обозначим через $\widetilde{d_x\mathcal{F}}$ косоортогональное дополнение к $d_x\mathcal{F}$ в $\mathfrak{g}$ относительно кососимметрической формы $A_x : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$, $A_x(\cdot,\cdot) = \langle x, [\cdot,\cdot]\rangle$, порожденной скобкой Пуассона-Ли:

$$\widetilde{d_x\mathcal{F}} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid A_x(\xi, d_x\mathcal{F}) = 0\}.$$

Коммутативность набора $\mathcal{F}$ означает, что подпространство $d_x\mathcal{F}$ изотропно относительно формы A_x, т.е. $d_x\mathcal{F} \subset \widetilde{d_x\mathcal{F}}$, а полнота набора

$\mathcal{F}$ означает, что $\dim d_x\mathcal{F} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ почти всюду на $\mathfrak{g}^*$ (т.е. на открытом по Зарисскому множестве). С другой стороны хорошо известно, что $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ — это в точности размерность максимального изотропного подпространства в точке $x \in \mathfrak{g}^*$ общего положения. Таким образом, полнота коммутативного набора $\mathcal{F}$ эквивалентна тому, что подпространство $d_x\mathcal{F}$ максимально изотропно относительно формы A_x для точек $x \in \mathfrak{g}^*$ общего положения , т.е.

$$d_x\mathcal{F} = \widetilde{d_x\mathcal{F}} \quad \text{для почти всех } x \in \mathfrak{g}^*. \tag{1.26}$$

В том случае когда это условие выполнено в точке x_0, мы будем говорить, что коммутативный набор $\mathcal{F}$ является полным в точке x_0.

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}$, полученную из $\mathfrak{g}$ расширением основного поля $\mathbb{K}$ до его алгебраического замыкания $\bar{\mathbb{K}}$, и множество сингулярных элементов в коалгебре $(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*$:

$$(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} = \{x \in (\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^* \mid \dim \operatorname{Ann}(x) > \operatorname{ind} \mathfrak{g}\}.$$

Ответ на вопрос, в каком случае набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ является полным, дается следующим критерием.

Теорема 11. *Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль и $a \in \mathfrak{g}^*_{reg}$ — регулярный элемент.*

1. *Коммутативный набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$, построенный формальным методом сдвига аргумента, является полным тогда и только тогда, когда*
$$\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2.$$
2. *Коммутативный набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ является полным в регулярной точке $x \in \mathfrak{g}^*_{reg}$ тогда и только тогда, когда прямая $\{x + \lambda a \mid \lambda \in \bar{\mathbb{K}}\}$ не пересекает множество $(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing}$.*

Доказательство. В каждой точке $x \in \mathfrak{g}^*$ стандартная скобка Ли-Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ и скобка $\{\cdot,\cdot\}_a$, полученная замораживанием аргумента (см. Замечание 9), индуцируют семейство кососимметрических билинейных форм на $\mathfrak{g}$, $\mathcal{S}^x = \operatorname{span}\{A_x, A_a\}$. Обозначим через $\mathcal{S}^x_0$ подмножество в $\mathcal{S}^x$, состоящее из форм максимального ранга $R_0 = \dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \mathfrak{g}$, и пусть $L^x_0 \subset \mathfrak{g}$ — подпространство, порожденное ядрами форм общего положения:

$$\mathcal{S}^x_0 = \{A_{\lambda_1 x + \lambda_2 a} \mid \lambda_1 x + \lambda_2 a \in \mathfrak{g}^*_{reg}\},$$

$$L_0^x = \mathrm{span}\,\{\mathrm{Ker}\ A \mid A \in \mathcal{S}_0^x\}.$$

Из леммы 6 следует, что для любого $x \in \mathfrak{g}^*$

$$d_x\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g})) = L_0^x. \tag{1.27}$$

Действительно, $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ состоит из s бигамильтоновых иерархий $\{f_1^{(j)}, f_2^{(j)}, \dots\}$, $j = 1, \dots, s$ (см. Замечание 9). В точке x каждая бигамильтонова иерархия индуцирует последовательность векторов $\{df_1^{(j)}, df_2^{(j)}, \dots\} \subset \mathfrak{g}$, которая является иерархией вида (1.20) относительно форм A_x и A_a. Кроме того, в силу (1.16), вектора $df_1^{(1)}, \dots, df_1^{(s)}$ порождают $\mathrm{Ann}(a) = \mathrm{Ker}\ A_a$. Остается заметить, что $A_a \in \mathcal{S}_0^x$ (т.к. a регулярен), и мы попадаем в условия леммы 6, где роль L' играет подпространство $d_x\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{g}$.

Таким образом, из геометрической интерпретации условия полноты (1.26) и равенства (1.27) следует, что полнота набора $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ эквивалентна тому, что для точек $x \in \mathfrak{g}^*$ общего положения

$$L_0^x = \widetilde{L_0^x}.$$

Теперь, чтобы применить к подпространству L_0^x Лемму 7, рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и все возникающие подпространства над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{K}}$ основного поля $\mathbb{K}$. Итак, коммутативный набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ является полным тогда и только тогда, когда для точек $x \in (\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*$ общего положения

$$(\widetilde{L_0^x})^{\bar{\mathbb{K}}} = (L_0^x)^{\bar{\mathbb{K}}}. \tag{1.28}$$

Пусть $C_1, \dots, C_q$ — все, с точностью до пропорциональности, нетривиальные формы $(\mathcal{S}^x)^{\bar{\mathbb{K}}}$ такие, что $\mathrm{rank}\, C_i < R_0$. Тогда из Леммы 7 следует, что

1. $\mathrm{Ker}\ C_i \subset (\widetilde{L_0^x})^{\bar{\mathbb{K}}}, \quad i = 1, \dots, q,$ (Следствие 2);

2. Если все нетривиальные формы имеют максимальный ранг, т.е. $(\mathcal{S}_0^x)^{\bar{\mathbb{K}}} = (\mathcal{S}^x)^{\bar{\mathbb{K}}} \setminus \{0\}$, то $(\widetilde{L_0^x})^{\bar{\mathbb{K}}} = (L_0^x)^{\bar{\mathbb{K}}}$ (Следствие 3).

Таким образом, (1.28) выполнено тогда и только тогда, когда все нетривиальные формы $A_{\lambda_1 x + \lambda_2 a}$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2 \in \bar{\mathbb{K}}$ имеют максимальный ранг R_0. В терминах алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}}$ это условие эквивалентно тому, что все элементы вида $\lambda_1 a + \lambda_2 x$ (за исключением тривиальной комбинации) являются регулярными. Геометрически это означает, что двумерная плоскость, порожденная ковекторами x и a в $(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*$, пересекает множество сингулярных точек $(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing}$ лишь в нуле. Полнота набора $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ означает выполнение этого геометрического условия для почти всех $x \in (\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*$. Ясно, что это происходит тогда и только тогда, когда $\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2$.

Для доказательства пункта 2 теоремы остается лишь заметить, что если $x \in \mathfrak{g}^*_{reg}$, то

$$\operatorname{span}\{x, a\} \cap (\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} = 0 \;\Leftrightarrow\; \{x + \lambda a \mid \lambda \in \bar{\mathbb{K}}\} \cap (\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} = \emptyset.$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 13. Условие полноты $\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2$ допускает естественную интерпретацию без использования алгебраического замыкания основного поля. Дело в том, что множества сингулярных элементов в $\mathfrak{g}^*$ и в $(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*$ задаются одной и той же системой полиномиальных уравнений. Соответствующими полиномами являются миноры порядка $(\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ матрицы кососимметрической формы A_x, элементы которой имеют вид $(A_x)_{ij} = c^k_{ij} x_k$. Ясно, что эти миноры являются многочленами степени $(\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ от $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$, а условие полноты в точности означает, что наибольший общий делитель этих многочленов тривиален. Очевидно, что наибольший общий делитель многочленов не меняется при расширении поля. Отметим также, что нахождение наибольшего общего делителя может быть осуществлено при помощи алгоритма Евклида.

1.6 Конструкция Болсинова

Перед тем как перейти к примерам применения теоремы 11, напомним как устроено геометрическое доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко [7], позволяющее строить полные коммутативные наборы полиномов на двойственных пространствах произвольных конечномерных алгебр Ли. Здесь мы опишем соответствующую конструкцию в алгоритмическом духе, опуская подробные объяснения, которые можно найти в [7] (см. также [33]).

Как уже отмечалось в разделе 1.1, в основе геометрического доказательства теоремы Садэтова, предложенного Болсиновым, лежит следующая лемма:

Лемма 1. *Любая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. *Существует коммутативный идеал $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g}$, не являющийся одномерным центром $\mathfrak{g}$ (т.е. либо $\dim \mathfrak{h} > 1$, либо $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \neq 0$);*

2. *Существует идеал $\mathfrak{h}_m \lhd \mathfrak{g}$, изоморфный алгебре Гейзенберга, и при этом центр $\mathfrak{g}$ совпадает с центром $\mathfrak{h}_m$, $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{h}_m)$;*

3. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста или $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{K}$, где $\mathfrak{g}_0$ полупроста.*

Разберем каждый из этих случаев по отдельности.

1. Пусть $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g}$ коммутативный идеал. Рассмотрим представление $(\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}})^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{h}^*)$, являющееся двойственным к присоединенному представлению $\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$ и для каждого элемента $h \in \mathfrak{h}^*$ обозначим через $\mathrm{St}(h) \subset \mathfrak{g}$ его стационарную подалгебру, $\mathrm{St}(h) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}})^*_{\xi} h = 0\}$. Обозначим через $L(\mathfrak{g}, (\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}})^*, \mathfrak{h}^*)$ множество всех рациональных сечений расслоения стационарных подалгебр над $\mathfrak{h}^*$:

$$L(\mathfrak{g}, (\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}})^*, \mathfrak{h}^*) = \left\{ \Psi : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{g} \;\middle|\; \begin{array}{l} \Psi - \text{рац. отображение,} \\ \Psi(h) \in \mathrm{St}(h)\ \forall h \in \mathfrak{h}^*. \end{array} \right\}$$

Множество $L(\mathfrak{g}, (\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}})^*, \mathfrak{h}^*)$ является алгеброй Ли над полем $\mathbb{K}(\mathfrak{h}^*) = \mathrm{Frac}(S(\mathfrak{h}))$ рациональных функций на $\mathfrak{h}^*$ со следующей естественой скобкой: $[\Psi_1, \Psi_2](h) = [\Psi_1(h), \Psi_2(h)]$.

Рассмотрим теперь множество

$$\mathrm{Ann}_{frac}(\mathfrak{h}) = \{f/g \mid f \in \mathrm{Ann}(\mathfrak{h}),\ g \in S(\mathfrak{h})\},$$

где $\mathrm{Ann}(\mathfrak{h}) = \{f \in S(\mathfrak{g}) \mid \{f, \eta\} = 0\ \forall \eta \in \mathfrak{h}\}$. Легко показать, что $\mathrm{Ann}_{frac}(\mathfrak{h})$ тоже является алгеброй Ли (со скобкой Пуассона-Ли) над полем $\mathbb{K}(\mathfrak{h}^*)$.

Отображение

$$\varkappa : L(\mathfrak{g}, (\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}})^*, \mathfrak{h}^*) \to \mathrm{Ann}_{frac}(\mathfrak{h}),$$

$$\Psi \mapsto f_\Psi, \quad f_\Psi(x) = \langle x, \Psi(\pi_{\mathfrak{h}^*} x)\rangle,$$

где $\pi_{\mathfrak{h}^*} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ естественная проекция, является гомоморфизмом алгебр Ли, т.е. $\{f_{\Psi_1}, f_{\Psi_2}\}(x) = f_{[\Psi_1,\Psi_2]}(x)$. Обозначим через $L_{\mathfrak{h}}$ образ этого гомоморфизма:

$$L_{\mathfrak{h}} = \mathrm{Im}\, \varkappa.$$

Можно показать, что

$$\dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h}^*)} L_{\mathfrak{h}} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{St}(h) - \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{h} + 1,$$

где $\mathrm{St}(h)$ стационарная подалгебра общего положения.

Таким образом, мы построили конечномерную подалгебру Ли $L_{\mathfrak{h}} \subset \mathrm{Ann}_{frac}(\mathfrak{h})$ над расширенным полем $\mathbb{K}(\mathfrak{h}^*)$. Заметим, что $\dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h}^*)} L_{\mathfrak{h}} < \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$. Пусть $\mathcal{F}(L_{\mathfrak{h}}, \mathbb{K}(\mathfrak{h}^*))$ полный коммутативный набор полиномов в $S(L_{\mathfrak{h}})$ в смысле поля $\mathbb{K}(\mathfrak{h}^*)$. Без ограничения общности, будем считать, что набор $\mathcal{F}(L_{\mathfrak{h}}, \mathbb{K}(\mathfrak{h}^*))$ замкнут относительно умножения и содержит все константы, т.е. элементы поля $\mathbb{K}(\mathfrak{h}^*)$. Функции из набора $\mathcal{F}(L_{\mathfrak{h}}, \mathbb{K}(\mathfrak{h}^*))$ имеют вид f/g, где $f \in \mathrm{Ann}(\mathfrak{h})$ и $g \in S(\mathfrak{h}) \subset \mathbb{K}(\mathfrak{h}^*)$. На ряду с f/g набор $\mathcal{F}(L_{\mathfrak{h}}, \mathbb{K}(\mathfrak{h}^*))$ содержит полиномы f и g по отдельности. Домножив каждую рациональную функцию из $\mathcal{F}(L_{\mathfrak{h}}, \mathbb{K}(\mathfrak{h}^*))$ на ее знаменатель, мы получим набор полиномов в $\mathrm{Ann}(\mathfrak{h})$:

$$\mathcal{F}_{pol}(L_{\mathfrak{h}}, \mathbb{K}(\mathfrak{h}^*)) = \{f \mid f/g \in \mathcal{F}(L_{\mathfrak{h}}, \mathbb{K}(\mathfrak{h}^*))\} \subset \mathrm{Ann}(\mathfrak{h}).$$

Можно показать, что набор $\mathcal{F}_{pol}(L_{\mathfrak{h}}, \mathbb{K}(\mathfrak{h}^*))$ является полным коммутативным набором в $S(\mathfrak{g})$.

2. Пусть $\mathfrak{h}_m \lhd \mathfrak{g}$ идеал, изоморфный алгебре Гейзенберга и центр $\mathfrak{g}$ совпадает с центром $\mathfrak{h}_m$. Напомним структуру алгебры Гейзенберга: $\mathfrak{h}_m$ разлагается в прямую сумму подпространства V размерности $2m$ и одномерного центра $Z(\mathfrak{h}_m)$, порожденного вектором e,
$$\mathfrak{h}_m = V^{2m} \oplus \mathrm{span}\,\{e\}.$$
Коммутатор двух элементов $\xi_1, \xi_2 \in V$ устроен так: $[\xi_1, \xi_2] = \omega(\xi_1, \xi_2) e$, где w симплектическая структура на V.

Определим подалгебру $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ следующим образом:

$$\mathfrak{b} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_\xi V \subset V\}.$$

Можно показать, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus V \quad \text{и} \quad \mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}_m = Z(\mathfrak{h}_m).$$

Аналогично случаю 1, рассмотрим множество

$$\mathrm{Ann}_{frac}(\mathfrak{h}_m) = \{f/g \mid f \in \mathrm{Ann}(\mathfrak{h}_m),\ g \in S(Z(\mathfrak{g}))\}.$$

Следующее отображение является вложением симметрической алгебры $S(\mathfrak{b})$ в $\mathrm{Ann}_{frac}(\mathfrak{h}_m)$:

$$\kappa : S(\mathfrak{b}) \to \mathrm{Ann}_{frac}(\mathfrak{h}_m), \quad f \mapsto \tilde{f},$$

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(b+v) = f(b + 1/2\langle e, b\rangle l_v),$$

где $x = b + v$ разложение двойственное к $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus V$ и $l_v \in \mathfrak{b}^*$, $l_v(\beta) = \langle \omega^{-1}(\mathrm{ad}^*_\beta v), v\rangle$.

Пусть $\mathcal{F}(\mathfrak{b})$ — полный коммутативный набор полиномов в $S(\mathfrak{b})$. Без ограничения общности, будем считать, что $\mathcal{F}(\mathfrak{b})$ замкнут относительно умножения и содержит $S(Z(\mathfrak{g}))$. Пусть $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{b}) = \kappa(\mathcal{F}(\mathfrak{b})) \subset \mathrm{Ann}_{frac}(\mathfrak{h}_m)$. Как и выше, возьмем "полиномиальную часть" $\widetilde{\mathcal{F}}_{pol}(\mathfrak{b})$ набора $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{b})$:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{pol}(\mathfrak{b}) = \left\{ f \mid f/g \in \widetilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{b}) \right\} \subset \mathrm{Ann}(\mathfrak{h}_m).$$

Набор $\widetilde{\mathcal{F}}_{pol}(\mathfrak{b})$ является полным коммутативным набором в $S(\mathfrak{g})$.

3. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста или $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{K}$, где $\mathfrak{g}_0$ полупроста, то полный коммутативный набор полиномов в $S(\mathfrak{g})$ может быть построен методом сдвига аргумента. В полупростом случае метод сдвига аргумента работает для любого поля ненулевой характеристики, т.к. условие полноты сохраняется при расширении поля. Подробности и примеры можно найти в [7].

Описанная выше конструкция позволяет действовать по индукции: в зависимости от того, какому их трех перечисленных в лемме 1 случаев удовлетворяет алгебра Ли $\mathfrak{g}$, мы либо сводим задачу к алгебре Ли меньшей размерности, либо строим полный коммутативный набор методом сдвига аргумента.

1.7 Примеры

Напомним, что формальный метода сдвига аргумента для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над произвольным полем $\mathbb{K}$ и доказательство критерия полноты коммутативного набора полиномов в $P(\mathfrak{g})$, построенного этим методом, были мотивированы тем, что это поможет упростить алгоритм, описанный в предыдущем разделе. Следуя конструкции Болсинова, нужно проверить, является ли алгебра полупростой, и если нет, то делать шаг индукции. Формальный метод сдвига аргумента позволяет вместо проверки полупростоты вычислять коразмерность множества сингулярных точек $\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing}$ и делать индуктивный шаг только если $\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \leq 1$. Вообще говоря, во втором случае количество шагов индукции меньше, т.к. для полупростой алгебры Ли $\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} = 3$.

Теперь естественной целью является предъявить пример алгебры Ли, для которой формальный метод сдвига аргумента действительно позволяет сократить число шагов индукции. Такой пример привести нетрудно: для этого достаточно взять не полупростую алгебру Ли над абстрактным полем, коразмерность множества сингулярных точек которой больше 1.

Пример 5. Пусть $L_{7,1}$ алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$, коммутационные соотношения которой в базисе $\{X_1, \ldots, X_7\}$ имеют следующий вид:

$$\begin{array}{llll}
[X_1, X_2] = X_3, & [X_1, X_3] = -X_2, & [X_1, X_5] = X_6, & [X_1, X_6] = -X_5, \\
[X_2, X_3] = X_1, & [X_2, X_4] = -X_6, & [X_2, X_6] = X_4, & [X_3, X_4] = X_5, \\
[X_3, X_5] = -X_4, & [X_j, X_7] = X_j, & 4 \leq j \leq 6. &
\end{array}$$

Алгебра $L_{7,1}$ не является полупростой, так как она содержит абелев идеал $\operatorname{span}\{X_4, X_5, X_6\}$. Поэтому, следуя конструкции Болсинова, необходимо делать индуктивный шаг. С другой стороны, множество сингулярных элементов является плоскостью $(L^*_{7,1})_{sing} = \{x_4 = x_5 = x_6 = 0\}$ и, следовательно, имеет коразмерность 3. Поэтому, согласно Теореме 11, коммутативный набор полиномов построенный формальным методом сдвига аргумента является полным.

Приведенный пример является несколько искусственным в том смысле, что алгебра Ли рассматривается над абстрактным полем, а не над “привычным” полем вещественных или комплексных чисел. “Нетривиальным” примером была бы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) такая, что:

(i) $\mathfrak{g}$ не является полупростой алгеброй Ли.

(ii) $\mathfrak{g}$ не содержит идеала, изоморфного алгебре Гейзенберга. Поэтому (с учетом (i) и Леммы 1) существует коммутативный идеал $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g}$, не являющийся одномерным центром $\mathfrak{g}$. И, следовательно, на первом шаге индукции получается алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ над действительно новым полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}(\mathfrak{h}^*)$ (или $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathfrak{h}^*)$).

(iii) Может случится так, что коммутативный идеал $\mathfrak{h}$ является слишком большим, т.е. таким, что его базис (рассматриваемый как набор линейных полиномов на $\mathfrak{g}^*$) уже образует полный коммутативный набор в $P(\mathfrak{g})$ и рассматривать алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$ нет необходимости. В этом пункте мы требуем, чтобы это было не так: $P(\mathfrak{h}) \subset P(\mathfrak{g})$ не является коммутативной подалгеброй максимальной размерности.

(iv) Алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ не полупроста и не является коммутативной, тогда, следуя алгоритму, нужно снова применять индукцию, чтобы построить полный коммутативный набор в $P(\tilde{\mathfrak{g}})$.

(v) $\operatorname{codim}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geq 2$, тогда формальный метод сдвига аргумента сразу дает полный коммутативный набор в $P(\tilde{\mathfrak{g}})$.

В следующем параграфе мы покажем, что среди вещественных алгебр Ли малой размерности существует ровно одна, удовлетворяющая условиям (i)–(v).

1.7.1 Вещественные алгебры Ли малой размерности

В серии работ [42, 43, 44] была получена классификация вещественных алгебр Ли до размерности 5 включительно. В [41] приведен список всех нильпотентных вещественных алгебр Ли размерности 6. В статье [46] были вычислены инварианты коприсоединенного представления для всех этих алгебр. Придерживаясь обозначений в [46], мы будем обозначать алгебру Ли малой размерности через $A_{n,m}$, где n размерность алгебры, а m ее порядковый номер в классификации алгебр той же размерности. В работе [21] для каждой алгебры $A_{n,m}$ был построен полный коммутативный набор полиномов методом Садэтова. Следуя [21], можно показать, что верна следующая теорема.

Теорема 12.

1. *Любая из 9 трехмерных вещественных алгебр Ли удовлетворяет одному из следующих условий:*

   a) *$A_{3,m}$ полупроста (в 2 случаях из 9).*

   b) *$A_{3,m}$ содержит большой коммутативный идеал (в 7 случаях из 9).*

2. *Любая из 12 четырехмерных вещественных алгебр Ли удовлетворяет одному из следующих условий:*

   a) *$A_{4,m}$ содержит идеал изоморфный алгебре Гейзенберга (в 1 случае из 12).*

   b) *$A_{4,m}$ содержит большой коммутативный идеал (в 10 случаях из 12).*

   c) *$A_{4,m}$ содержит коммутативный идеал, не являющийся ее одномерным центром, и алгебра Ли, полученная после первого шага индукции, коммутативна (в 1 случае из 12).*

3. *Любая из 40 пятимерных вещественных алгебр Ли удовлетворяет одному из следующих условий:*

   a) *$A_{5,m}$ содержит большой коммутативный идеал (в 34 случаях из 40).*

   b) *$A_{5,m}$ содержит коммутативный идеал, не являющийся ее одномерным центром, и алгебра Ли, полученная после первого шага индукции, коммутативна (в 3 случаях из 40).*

   c) *$A_{5,m}$ является одной из следующих алгебр: $A_{5,25}$, $A_{5,26}$, $A_{5,37}$.*

4. *Любая из 22 шестимерных вещественных нильпотентных алгебр Ли удовлетворяет одному из следующих условий:*

   a) *$A_{6,m}$ содержит большой коммутативный идеал (в 19 случаях из 22).*

b) $A_{6,m}$ содержит коммутативный идеал, не являющийся ее одномерным центром, и алгебра Ли, полученная после первого шага индукции, коммутативна (в 3 случаях из 22).

Таким образом, из всего списка вещественных алгебр Ли малых размерностей претендовать на роль "нетривиального" примера могут только три алгебры: $A_{5,25}$, $A_{5,26}$, $A_{5,37}$. Рассмотрим их подробнее.

- Алгебры $A_{5,25}$ и $A_{5,26}$

  Таблицы Кэли этих алгебр (точнее семейств алгебр) имеют следующий вид:

$A_{5,25}$:

0	0	0	0	$2pe_1$
0	0	e_1	0	pe_2+e_3
0	$-e_1$	0	0	pe_3-e_2
0	0	0	0	be_4
$-2pe_1$	$-pe_2-e_3$	$-pe_3+e_2$	$-be_4$	0

$$p\in\mathbb{R}, b\neq 0.$$

$A_{5,26}$:

0	0	0	0	$2pe_1$
0	0	e_1	0	pe_2+e_3
0	$-e_1$	0	0	pe_3-e_2
0	0	0	0	εe_1+2pe_4
$-2pe_1$	$-pe_2-e_3$	$-pe_3+e_2$	$-\varepsilon e_1-2pe_4$	0

$$p\in\mathbb{R}, \varepsilon=\pm 1.$$

  С точки зрения конструкции Болсинова, алгебры Ли $A_{5,25}$ и $A_{5,26}$ устроены совершенно одинаково: существует коммутативный идеал ($\mathfrak{h}=\mathrm{span}\,\{e_1,e_4\}$) такой, что алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ полученная после первого шага индукции трехмерна (над $\mathbb{K}=\mathbb{R}(e_1,e_4)$) и имеет следующую таблицу Кэли:

$\tilde{\mathfrak{g}}$:

0	0	0
0	0	f_1
0	$-f_1$	0

  Очевидно,

$$\mathrm{codim}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing}=1,$$

поэтому формальный метод сдвига аргумента полного набора в $P(\tilde{\mathfrak{g}})$ не дает. На самом деле, для того, чтобы получить полный коммутативный набор в $P(\tilde{\mathfrak{g}})$ достаточно взять коммутативный идеал натянутый на первые два вектора.

- Алгебра $A_{5,37}$

  Таблицы Кэли этой алгебры Ли:

  $A_{5,37}$:

0	0	0	$2e_1$	0
0	0	e_1	e_2	$-e_3$
0	$-e_1$	0	e_3	e_2
$-2e_1$	$-e_2$	$-e_3$	0	0
0	e_3	$-e_2$	0	0

  Алгебра Ли $A_{5,37}$ не является полупростой, поэтому, следуя общему алгоритму, мы должны делать шаг индукции. В $A_{5,37}$ есть одномерный коммутативный идеал $\mathfrak{h} = \operatorname{span}\{e_1\}$, не являющийся центром. Алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, полученная после первого шага индукции, четырехмерна над $\mathbb{K} = \mathbb{R}(e_1)$ и имеет следующую таблицу Кэли:

  $\tilde{\mathfrak{g}}$:

0	0	0	0
0	0	f_1	$-f_3$
0	$-f_1$	0	f_2
0	f_3	$-f_2$	0

  Очевидно, что $\tilde{\mathfrak{g}}$ снова не является полупростой, и поэтому мы опять должны применять шаг индукции. В $\tilde{\mathfrak{g}}$ есть идеал изоморфный алгебре Гейзенберга, $\tilde{\mathfrak{h}} = \operatorname{span}\{f_1, f_2, f_3\}$, причем центр идеала совпадает с центром алгебры, $Z(\tilde{\mathfrak{h}}) = Z(\tilde{\mathfrak{g}})$. С другой стороны,

$$\operatorname{codim}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} = 3,$$

  поэтому формальный метод сдига аргумента сразу дает полный коммутативный набор в $P(\tilde{\mathfrak{g}})$.

  Однако, можно показать, что

$$\operatorname{codim}({A_{5,37}}^{\mathbb{C}})^*_{sing} = 3.$$

  Поэтому мы можем сразу применить стандартный метод сдвига аргумента и получить полный набор полиномов в $P(A_{5,37})$.

Таким образом, среди вещественных алгебр Ли малой размерности существует ровно одна алгебра Ли, удовлетворяющая свойствам (i)-(v). Для алгебры $A_{5,37}$ применение формального метода сдвига аргумента уменьшает число шагов индукции по сравнению с общей конструкцией Болсинова. Однако, в случае этой алгебры можно с самого начала применить стандартный метод сдвига аргумента и вообще избежать шагов индукции.

В связи с этим является интересным следующий вопрос: может ли в процессе индукции увеличиваться коразмерность множества сингулярных точек? То есть существует ли алгебра Ли $\mathfrak{g}$ (скажем над $\mathbb{R}$) такая, что

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*_{sing} < \operatorname{codim}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing}.$$

Ответ на этот вопрос положительный: например, алгебра $A_{6,21}$. Это единственный пример среди алгебр малой размерности.

$$A_{6,21}: \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & e_3 & 0 & 0 & e_6 & 0 \\ \hline -e_3 & 0 & e_4 & e_5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_4 & 0 & e_6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_5 & -e_6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \operatorname{codim}(A_{6,21}{}^{\mathbb{C}})^*_{sing} = 1,$$

После шага индукции получается коммутативная двумерная алгебра Ли, т.е $\operatorname{codim}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} = 2$. Существуют также алгебры Ли, для которых коразмерность множества сингулярных точек наоборот уменьшается.

Глава 2

Геометрия интегрируемых геодезических потоков

Существует хорошо известная проблема распознавания римановых многообразий по спектру их оператора Бельтрами-Лапласа, которая, как принято считать, была сформулирована в 1966 г. в работе [40] в виде знаменитого вопроса: “Can one hear the shape of a drum?”[1]. Проблема состоит в эквивалентности изоспектральности и изометричности многообразий: будут ли многообразия имеющие одинаковый спектр изометричны? В общем случае ответ зависит от геометрии многообразия [35]. В связи с этим задача об описании спектра риманова многообразия сама по себе является весьма актуальной.

Во второй части диссертации мы продолжаем исследования начатые А. В. Болсиновым, И. А. Таймановым, А. П. Веселовым и Х. Р. Дуллиным в работах [8, 9, 34].

[1]“Можно ли услышать форму барабана?”

2.1 Надстройки автоморфизмов торов

Замкнутое многообразие M_A^{n+1} называется надстройкой автоморфизма $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, если существует расслоение

$$p : M_A^{n+1} \xrightarrow{\overset{A}{\curvearrowright}\mathbb{T}^n} S^1$$

многообразия над окружностью S^1 со слоем тор $\mathbb{T}^n$, такое, что монодромия расслоения задается матрицей $A \in SL(n, \mathbb{Z})$.

Многообразие M_A^{n+1} обладает интересными свойствами. Простейший нетривиальный пример с

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

был рассмотрен Л. Батлером [36]. В этой работе была построена аналитическая риманова метрика на M_A^3, геодезический поток которой интегрируем по Лиувиллю при помощи гладких интегралов, но неинтегрируем в классе аналитических функций. Последнее утверждение было доказано при помощи топологических препятствий к аналитической интегрируемости, найденных И. А. Таймановым [28, 29]. Таким образом, было показано, что некоторые из этих топологических препятствий не мешают гладкой интегрируемости.

Г. П. Патернайн [47, 48] доказал, что если геодезический поток на замкнутом многообразии интегрируем, то, при выполнении некоторых дополнительных условий, его топологическая энтропия равна нулю. Он также предположил, что топологическая энтропия интегрируемого геодезического потока на замкнутом многообразии всегда равна нулю. Отметим, что топологическая энтропия в примере Батлера нулевая, что согласуется с гипотезой Патернайна.

А. В. Болсинов и И. А. Тайманов [8] опровергли эту гипотезу для гладкого случая, рассмотрев многообразие M_A^3 с автоморфизмом

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обобщив конструкцию Батлера, они построили первый пример C^∞-интегрируемого геодезического потока с положительной топологической энтропией. Аналогичные результаты имеют место и для случая $n > 2$ [9].

Квантовым аналогом задачи об интегрируемости геодезического потока на многообразии является описание спектра и собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа. В статье [34] авторами построен базис в пространстве $L_2(M_A^3)$, состоящий из собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа, которые описываются при помощи решений так называемого модифицированного уравнения Матье.

Во второй части диссертации мы рассматриваем многомерную ситуацию $n > 2$ и описываем спектр и собственный базис оператора Бельтрами–Лапласа на $L_2(M_A^{n+1})$ в терминах решений одномерного уравнения Шредингера.

2.2 Построение римановой метрики на M_A^{n+1}

Надстройку автоморфизма тора M_A^{n+1} можно определить следующим образом. Рассмотрим цилиндр $\mathcal{C}^{n+1} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ стандартные координаты на $\mathbb{T}^n$ определенные по модулю 1, и z координата на прямой. Рассмотрим действие дискретной группы $\mathbb{Z}$ на цилиндре, порожденное следующим преобразованием T_A

$$T_A : (x, z) \mapsto (Ax, z + 1), \tag{2.1}$$

где целочисленная матрица A определяет автоморфизм тора $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$. Теперь соответствующее многообразие M_A^{n+1} определяется как фактор цилиндра по этому действию $M_A^{n+1} = \mathcal{C}^{n+1}/\mathbb{Z}$.

Всюду далее мы будем предполагать, что $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ является гиперболической матрицей (по определению это означает, что у для любого ее собственного значения λ выполнено $|\lambda| \neq 1$) с положительным спектром $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

Вместо стандартных периодических координат $(x_1, \dots, x_n)$ на торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ нам будет удобно пользоваться другими линейными координатами, которые будут согласованы с действием гиперболического автоморфизма A. Пусть спектр $\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ и n_α — кратность собственного значения λ_α, $\alpha = 1, ..., k$. Тогда в некотором базисе $\{f_i\}_{i=1}^n$ (состоящем из собственных и присоединенных векторов) матрица A будет иметь жорданову нормальную форму:

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{pmatrix},$$

где B_α — жорданова клетка порядка n_α

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_\alpha \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $(u_1, \dots, u_n)$ координаты на торе соответствующие базису $\{f_i\}_{i=1}^n$. Заметим, что новые координаты не являются периодическими на торе : $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$ определяют одну и туже точку на $\mathbb{T}^n$ тогда и только тогда, когда $u - \hat{u} = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$, где $a_i \in \mathbb{Z}$ и $\{e_i\}$ — базис решетки Γ ассоциированной с $\mathbb{T}^n$.

Риманову метрику на M_A^{n+1} построим следующим образом. Сначала определим метрику на цилиндре $\mathcal{C}^{n+1}$, положим:

$$ds^2 = g_{ij}(z) du^i du^j + dz^2,$$

где

$$G(z) = (g_{ij}(z)) = \left(e^{-z \ln A}\right)^T G_0 \, e^{-z \ln A}.$$

Здесь G_0 — произвольная положительно определенная симметричная матрица порядка n (матрица метрики на нулевом слое $\{z = 0\}$), а $\ln A$ — вещественная однозначная ветвь логарифма, которая существует, так как $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Очевидно, что определенная таким образом метрика на цилиндре является инвариантной относительно описанного действия дискретной группы. Следовательно, эта метрика редуцируется до метрики на фактор-пространстве $M_A^{n+1} = \mathcal{C}^{n+1}/\mathbb{Z}$.

2.3 Оператор Бельтрами–Лапласа на M_A^{n+1}

Оператор Бельтрами–Лапласа — это оператор $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$, который на римановом многообразии представляется в виде

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det G}}\,\partial_i(g^{ij}\sqrt{\det G}\,\partial_j),$$

где ∂_i — частная производная по i-й координате, G — метрический тензор и g^{ij} — компоненты обратного тензора в локальных координатах.

В нашем случае $\det G = \det G_0$, так как матрица A унимодулярна, поэтому в координатах $(u_1, \ldots, u_n, z)$ оператор Бельтрами-Лапласа на многообразии M_A^{n+1} записывается в следующем виде:

$$\Delta = g^{ij}(z)\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,,$$

где

$$G^{-1}(z) = (g^{ij}(z)) = e^{z\ln A}\, G_0^{-1}\left(e^{z\ln A}\right)^T.$$

Вычисления показывают, что

$$G^{-1}(z) = \begin{pmatrix} e^{z\ln B_1}\, G_0^{11}\, e^{z\ln B_1^T} & \ldots & e^{z\ln B_1}\, G_0^{1k}\, e^{z\ln B_k^T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{z\ln B_k}\, G_0^{k1}\, e^{z\ln B_1^T} & \ldots & e^{z\ln B_k}\, G_0^{kk}\, e^{z\ln B_k^T} \end{pmatrix},$$

где $G_0^{-1} = (G_0^{\alpha\beta})$ разбиение на подматрицы, индуцированное разбиением матрицы A на жордановы клетки.

Матрица $e^{z\ln B_\alpha}\, G_0^{\alpha\beta}\, e^{z\ln B_\beta^T} \in \operatorname{Mat}(n_\alpha, n_\beta)$ и имеет вид:

$$e^{z\ln B_\alpha}\, G_0^{\alpha\beta}\, e^{z\ln B_\beta^T} = e^{z\ln\lambda_\alpha\lambda_\beta} P_{\alpha\beta}(z),$$

$$P_{\alpha\beta}(z) \in \operatorname{Mat}(n_\alpha, n_\beta).$$

Элементы $p_{ij}^{\alpha\beta}$ матрицы $P_{\alpha\beta}(z)$ являются полиномами от координаты z, степени которых приведены в таблице:

$n_\alpha + n_\beta - 2$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$n_\alpha - 1$
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$\vdots$	$\ddots$	4	3	2
$\vdots$	$\ddots$	3	2	1
$n_\beta - 1$	$\ldots$	2	1	0

$$\deg p_{ij}^{\alpha\beta}(z) = n_\alpha + n_\beta - i - j$$

Таким образом, в координатах $(u_1, \ldots, u_n, z)$ оператор Бельтрами-Лапласа на M_A^{n+1} имеет вид

$$\Delta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{(k,k)} \sum_{i,j=1}^{(n_\alpha,n_\beta)} e^{z\ln\lambda_\alpha\lambda_\beta} p_{ij}^{\alpha\beta}(z) \frac{\partial^2}{\partial u_\xi \partial u_\eta} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.2}$$

$$\xi = \xi(\alpha, i) = \sum_{s=1}^{\alpha-1} n_s + i, \quad \eta = \eta(\beta, j) = \sum_{s=1}^{\beta-1} n_s + j.$$

Здесь индексы α и β определяют подматрицу в $G^{-1}(z)$, а индексы i и j — элемент внутри этой подматрицы.

2.4 Спектр и собственные функции оператора Бельтрами–Лапласа

Квантовым аналогом задачи об интегрируемости геодезического потока римановой метрики на многообразии является описание спектра и собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа, отвечающего этой метрике

$$-\Delta\Psi = \mathcal{E}\Psi. \tag{2.3}$$

В нашем случае, $\Psi \in L_2(M_A^{n+1})$, а Δ — описанный выше оператор Бельтрами–Лапласа на $L_2(M_A^{n+1})$.

Так как коэффициенты Δ зависят только от z, то вполне естественно разделить переменные и искать собственные функции Δ в виде:

$$\Psi_\gamma(u, z) = e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} F(z), \tag{2.4}$$

где $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i^* \in \Gamma^*$, ($\gamma_i \in \mathbb{Z}$) элемент двойственной решетки тора, а $F \in L_2(\mathbb{R})$. Заметим, что спаривание $\langle\gamma, u\rangle$ определено по модулю $\mathbb{Z}$: $\langle\gamma, u\rangle = \langle\gamma, u + \sum_{i=1}^n a_i e_i\rangle = \langle\gamma, u\rangle + \sum_{i=1}^n \gamma_i a_i$. Но, так как $e^{2\pi i\mathbb{Z}} = 1$, то функция $\Psi_\gamma(u, z)$ определена корректно на M_A^{n+1}.

Подставляя теперь (2.4) в уравнение (2.3), (2.2), получим:

$$-\frac{d^2F(z)}{dz^2} + Q_\gamma(z)F(z) = \mathcal{E}F(z), \tag{2.5}$$

$$Q_\gamma(z) = (2\pi)^2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{(k,k)} \sum_{i,j=1}^{(n_\alpha,n_\beta)} e^{z\ln\lambda_\alpha\lambda_\beta} p_{ij}^{\alpha\beta}(z)\langle\gamma, f_\xi\rangle\langle\gamma, f_\eta\rangle. \qquad (2.6)$$

Таким образом, задача о поиске спектра и собственных функций оператора Бельтрами-Лапласа на SOL-многообразии M_A^{n+1} свелась к одномерному уравнению Шредингера (2.5) на прямой с потенциалом $Q_\gamma(z)$. В случае $n = 2$, уравнение (2.5) приводится к так называемому модифицированному уравнению Матье [34].

Свойства одномерного уравнения Шредингера (2.5) хорошо изучены. Известно [2], что если потенциал $Q_\gamma(z) \to +\infty$ при $|z| \to \infty$, то существует полная ортонормированная система собственных функций $F_k(z), k \in \mathbb{N}$ оператора $-\frac{d^2}{dz^2}+Q_\gamma(z)$, принадлежащих $L^2(\mathbb{R})$, собственные значения которых $\mathcal{E}_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Лемма 8. *Если $\gamma \neq 0$, то $Q_\gamma(z) \to +\infty$ при $|z| \to \infty$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$Q_\gamma(z) = (2\pi)^2 \cdot (\langle\gamma, f_1\rangle, \ldots, \langle\gamma, f_n\rangle)\, G^{-1}(z) \begin{pmatrix} \langle\gamma, f_1\rangle \\ \vdots \\ \langle\gamma, f_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Поэтому $Q_\gamma(z) > 0$ при $\gamma \neq 0$, так как метрика положительно определена и вектор $(\langle\gamma, f_1\rangle, \ldots, \langle\gamma, f_n\rangle) \neq 0$ при $\gamma \neq 0$.

Пусть $z \to +\infty$ (случай $z \to -\infty$ рассматривается аналогично).

Из (2.6) следует, что потенциал $Q_\gamma(z)$ является линейной комбинацией функций вида $e^{\mu z}q(z)$, где $\mu \in \mathbb{R}$, а $q(z)$ — полином. Поэтому, для доказательства леммы достаточно показать, что в этой линейной комбинации (после приведения всех подобных членов) найдется слагаемое такое, что $\mu > 0$. Действительно, тогда, в зависимости от полиномиально сомножителя, это слагаемое будет стремиться к $\pm\infty$, а следовательно и $Q_\gamma(z) \to \pm\infty$. Но так как $Q_\gamma(z) > 0$, то останется лишь возможность $Q_\gamma(z) \to +\infty$. Докажем, что такое слагаемое существует.

Пространство $\mathbb{R}^n$, в котором действует гиперболический оператор A, распадается в сумму двух инвариантных подпространств:

$$\mathbb{R}^n = V_A^- \oplus V_A^+,$$

$$V_A^- = \oplus_{\lambda<1} V_\lambda, \qquad V_A^+ = \oplus_{\lambda>1} V_\lambda.$$

Через V_λ обозначено корневое подпространство, соответствующее λ.

Лемма 9. *Если гиперболическая матрица $A \in SL(n, \mathbb{Z})$, то*

$$\mathrm{Ann}(V_A^+) \cap \Gamma^* = 0.$$

Доказательство. Так как $\mathbb{R}^n = V_A^- \oplus V_A^+$, то $\mathrm{Ann}(V_A^+) = (V_A^-)^*$. Поэтому имеем:

$$\mathrm{Ann}(V_A^+) \cap \Gamma^* = (V_A^-)^* \cap \Gamma^* = (V_A^- \cap \Gamma)^*.$$

Так как $V_A^- \cap \Gamma$ является подгруппой аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ и множество ее точек дискретно, то $V_A^- \cap \Gamma$ является решеткой [10]. Кроме того, $V_A^- \cap \Gamma$ инвариантно относительно A. Таким образом, $V_A^- \cap \Gamma$ — A-инвариантная подрешетка Γ.

Пусть существует ненулевой $v \in V_A^- \cap \Gamma$. Тогда $A^n v \in V_A^- \cap \Gamma$, для любых $n \in \mathbb{N}$. С одной стороны, так как множество $V_A^- \cap \Gamma$ дискретно, существует проколотая окрестность нуля U в $\mathbb{R}^n$ такая, что она не содержит ни одной точки из $V_A^- \cap \Gamma$. А с другой стороны, так как V_A^- состоит из векторов v для которых $A^n v \to 0$ при $n \to \infty$, для всех n начиная с некоторого $A^n v \in U$. Противоречие. Поэтому $V_A^- \cap \Gamma = 0$, а следовательно и $\mathrm{Ann}(V_A^+) \cap \Gamma^* = 0$. $\square$

Из Леммы 9 следует, что для любой точки $\gamma \neq 0$ двойственной решетки в базисе $\{f_i\}_{i=1}^n$ существует вектор $f_0 \in V_{\lambda_0} \subset V_A^+$, для которого $\langle \gamma, f_0 \rangle \neq 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $f_0 = f_1$ и $\lambda_0 = \lambda_1$. Тогда

$$Q_\gamma(z) = (2\pi)^2 e^{2z \ln \lambda_1} p_{11}^{11}(z) \langle \gamma, f_1 \rangle^2 + \dots$$

Остается заметить, что полином $p_{11}^{11}(z)$ не является тождественным нулем, так как $p_{11}^{11}(0) = (G_0^{-1})_{11} > 0$ как диагональный элемент положительно определенной матрицы G_0^{-1}. $\square$

Таким образом, каждому элементу $\gamma \in \Gamma^* \setminus \{0\}$ мы сопоставили серию собственных функций и собственных значений оператора Бельтрами-Лапласа на цилиндре $\mathcal{C}^{n+1}$:

$$\gamma \mapsto (\Psi_{\gamma,k}, \mathcal{E}_{\gamma,k}),$$

$$\Psi_{\gamma,k}(u, z) = e^{2\pi i \langle \gamma, u \rangle} F_{\gamma,k}(z).$$

Однако, функции $\Psi_{\gamma,k}$ не являются корректно определенными функциями на $M_A^{n+1} = \mathcal{C}^{n+1}/\mathbb{Z}$, так как они не инвариантны относительно действия (2.1) дискретной группы на цилиндре. Естественным соображением является усреднить функции по этому действию, то есть вместо $\Psi_{\gamma,k}$ рассмотреть ряд

$$\Psi_{\gamma,k}(u,z) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n) =: \widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z). \tag{2.7}$$

Преобразование $(u,z) \mapsto (Au, z+1)$ является изометрией, следовательно, оно сохраняет оператор Лапласа. Поэтому функция $\Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z) := \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n)$ будет решением уравнения (2.3) с тем же собственным значением $\mathcal{E}_{\gamma,k}$.

Теперь хочется написать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\Delta\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z) &= \Delta\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Delta\Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}_{\gamma,k}\Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n) = \mathcal{E}_{\gamma,k}\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Чтобы эти равенства из формальных превратились в осмысленные утверждения, необходимо доказать, что ряд (2.7) сходится к функции, корректно определенной на M_A^{n+1}, и что оператор Бельтрами–Лапласа коммутирует с операцией суммирования.

Известно [2], что для любого решения уравнения $-\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + v(z)f(z) = 0$, где $v(z) \to +\infty$ при $|z| \to +\infty$, выполнено одно из следующих условий:

1. Для любого $\alpha > 0$ существует M такое, что $|f(z)| \geq e^{\alpha|z|}$ при $|z| \geq M$;

2. Для любого $\alpha > 0$ существует M такое, что $|f(z)| \leq e^{-\alpha|z|}$ при $|z| \geq M$.

В нашем случае (2.5), в силу Леммы 8, $v(z) = Q_\gamma(z) - \mathcal{E} \to +\infty$ при $|z| \to +\infty$. Кроме того, все собственные функции $F_{\gamma,k}(z) \in L^2(\mathbb{R})$, поэтому, для одномерного уравнения Шредингера с растущим потенциалом может реализоваться только случай 2.

Таким образом, существует $M = M(\gamma,k)$ такое, что для всех $|z| > M$ выполнено

$$|F_{\gamma,k}(z)| \leq e^{-|z|}. \tag{2.9}$$

Докажем теперь несколько простых утверждений, обосновывающих равенства (2.8).

Лемма 10. *Ряд* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n)$ *сходится поточечно на цилиндре* $\mathcal{C}^{n+1} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $(u_0, z_0) \in \mathcal{C}^{n+1}$. Тогда

$$|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma,k}(A^n u_0, z_0+n)| = |\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i\langle\gamma, A^n u_0\rangle} F_{\gamma,k}(z_0+n)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_{\gamma,k}(z_0+n)|.$$

Используя оценку (2.9), имеем:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_{\gamma,k}(z_0+n)| \leq (e^{z_0} + e^{-z_0}) e^{-M-1} \frac{e}{e-1} + \sum_{n=-M}^{M} |F_{\gamma,k}(z_0+n)|.$$

для достаточно большого M. Последнее неравенство доказывает утверждение леммы 10. □

Таким образом, функция $\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}$ является корректно определенной функцией на $\mathcal{C}^{n+1}$. Кроме того, легко видеть, что $\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}$ является также функцией и на факторе $\mathcal{C}^{n+1}/\mathbb{Z}$, так как она инвариантна относительно преобразования $(u,z) \mapsto (Au, z+1)$.

Лемма 11.

1. *Ряд* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z)$ *сходится равномерно на* $\mathbb{T}^n \times [0,1]$*;*

2. $\Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z) \in L_2(\mathcal{C}^{n+1}) \subset L_2(\mathbb{T}^n \times [0,1])$*;*

3. $\widetilde{\Psi}_{\gamma,k} \in L_2(M^{n+1}_A)$.

Доказательство. Для доказательства пункта 1, необходимо и достаточно показать, что остаток ряда равномерно стремиться к нулю на $\mathbb{T}^n \times [0,1]$. Из доказательства Леммы 10 следует, что остаток ряда

$$\sum_{|n|>M} \Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z) \leq (e^z + e^{-z}) \frac{e^{-M}}{e-1}.$$

Это неравенство верно для всех $z \in [0,1]$ при достаточно большом M. Правая часть стремится к нулю при $M \to \infty$, что доказывает первое утверждение леммы.

Далее,

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n\times[0,1]} |\Psi^{(n)}_{\gamma,k}|^2\,dudz \le \int\limits_{\mathcal{C}^{n+1}} |\Psi^{(n)}_{\gamma,k}|^2\,dudz$$
$$= \operatorname{area}(\mathbb{T}^n)\int\limits_{\mathbb{R}} |F_{\gamma,k}(z+n)|^2 dz = \operatorname{area}(\mathbb{T}^n)\cdot ||F_{\gamma,k}||^2_{L_2(\mathbb{R})} < \infty.$$

Из первых двух утверждений леммы следует, что

$$\widetilde{\Psi}_{\gamma,k} \in L_2(\mathbb{T}^n\times[0,1]).$$

Пространство $M_A^{n+1} = \mathcal{C}^{n+1}/\mathbb{Z}$ получается из $\mathbb{T}^n\times[0,1]$ отождествлением граничных торов посредством автоморфизма задаваемого матрицей $A\in SL(n,\mathbb{Z})$. Поэтому

$$\int\limits_{M_A^{n+1}} |\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}|^2 \le \int\limits_{\mathbb{T}^n\times[0,1]} |\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}|^2,$$

что завершает доказательство леммы. □

Из Лемм 10, 11 и того, что $\Delta\Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z) = \mathcal{E}_{\gamma,k}\Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z)$ следует, что оператор Бельтрами–Лапласа можно переставлять с операцией суммирования.

Таким образом, цепочка равенств (2.8) обоснована и переход от функций $\Psi_{\gamma,k}$ на цилиндре к функциям $\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}$ на факторе $M_A^{n+1} = \mathcal{C}^{n+1}/\mathbb{Z}$ корректен.

Итак, каждому элементу $\gamma\in\Gamma^*\setminus\{0\}$ двойственной решетки тора $\mathbb{T}^n$ мы сопоставили серию собственных значений и “настоящих” собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами на пространстве $L_2(M_A^{n+1})$:

$$\gamma \mapsto (\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z),\mathcal{E}_{\gamma,k}),$$
$$\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i\langle\gamma,A^n u\rangle}F_{\gamma,k}(z+n).$$

Рассмотрим теперь естественное действие циклической подгруппы $\{A^*\}\subset SL(n,\mathbb{Z})$ на Γ^*. Через $[\gamma]$ обозначим орбиту этого действия:

$$[\gamma] = \{(A^*)^n\gamma, n\in\mathbb{Z}\}.$$

Лемма 12. *Если точки решетки $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^* \setminus \{0\}$ принадлежат одной орбите действия $\{A^*\} : \Gamma^*$, то соответствующие им собственные значения и собственные функции совпадают.*

Доказательство. Поскольку γ_1, γ_2 лежат на одной орбите, то существует $N \in \mathbb{Z}$ такое, что $\gamma_2 = (A^*)^N \gamma_1$. Тогда

$$\widetilde{\Psi}_{\gamma_2,k}(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{(A^*)^N\gamma_1,k}(A^n u, z+n).$$

Лемма 13. $\Psi_{A^*\gamma,k}(u,z) = \Psi_{\gamma,k}(Au, z+1)$.

Доказательство.

$$\Psi_{A^*\gamma,k}(u,z) = e^{2\pi i\langle A^*\gamma, u\rangle} F_{A^*\gamma,k}(z) = e^{2\pi i\langle \gamma, Au\rangle} F_{A^*\gamma,k}(z).$$

Функция $F_{A^*\gamma,k}$ является k-ым решением одномерного уравнения Шредингера с потенциалом $Q_{A^*\gamma}$.

$$\begin{aligned}
&Q_{A^*\gamma}(z) = (2\pi)^2 g^{ij}(z)\langle A^*\gamma, f_i\rangle\langle A^*\gamma, f_j\rangle \\
&= (2\pi)^2(\langle A^*\gamma, f_1\rangle, \dots, \langle A^*\gamma, f_n\rangle)\cdot\ G^{-1}(z)\ \cdot(\langle A^*\gamma, f_1\rangle, \dots, \langle A^*\gamma, f_n\rangle)^T \\
&= (2\pi)^2(\langle \gamma, Af_1\rangle, \dots, \langle \gamma, Af_n\rangle)\cdot\ G^{-1}(z)\ \cdot(\langle \gamma, Af_1\rangle, \dots, \langle \gamma, Af_n\rangle)^T \\
&= (2\pi)^2(\langle \gamma, f_1\rangle, \dots, \langle \gamma, f_n\rangle)\cdot\ AG^{-1}(z)A^T\ \cdot(\langle \gamma, f_1\rangle, \dots, \langle \gamma, f_n\rangle)^T \\
&= (2\pi)^2(\langle \gamma, f_1\rangle, \dots, \langle \gamma, f_n\rangle)\cdot\ G^{-1}(z+1)\ \cdot(\langle \gamma, f_1\rangle, \dots, \langle \gamma, f_n\rangle)^T \\
&= (2\pi)^2 g^{ij}(z+1)\langle \gamma, f_i\rangle\langle \gamma, f_j\rangle = Q_\gamma(z+1).
\end{aligned}$$

Таким образом, функция $F_{A^*\gamma,k}(z)$ является k-ым решением одномерного уравнения Шредингера с потенциалом $Q_{A^*\gamma}(z) = Q_\gamma(z+1)$. Следовательно $F_{A^*\gamma,k}(z) = F_{\gamma,k}(z+1)$. Окончательно получаем:

$$\Psi_{A^*\gamma,k}(u,z) = e^{2\pi i\langle \gamma, Au\rangle} F_{\gamma,k}(z+1) = \Psi_{\gamma,k}(Au, z+1).$$

Лемма 13 доказана. □

Используя Лемму 11 получаем:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}_{\gamma_2,k}(u,z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{(A^*)^N\gamma_1,k}(A^n u, z+n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma_1,k}(A^{n+N} u, z+n+N) = \widetilde{\Psi}_{\gamma_1,k}(u,z).
\end{aligned}$$

Лемма 12 доказана. □

Таким образом, собственные функции и собственные значения оператора Лапласа-Бельтрами параметризуются не точками двойственной решетки, а целыми орбитами:

$$[\gamma] \mapsto (\Psi_{[\gamma],k}, \mathcal{E}_{[\gamma],k}),$$

$$\Psi_{[\gamma],k}(u,z) := \widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n). \tag{2.10}$$

Рассмотрим отдельно случай $\gamma = 0$. Одномерное уравнение Шредингера (2.5) принимает совсем простой вид:

$$\frac{d^2F(z)}{dz^2} + \mathcal{E}F(z) = 0.$$

Поэтому при $\gamma = 0$ получаем следующий набор собственных функций и собственных значений:

$$(1,0), \quad (\cos k\pi z, (\pi k)^2), \quad (\sin k\pi z, (\pi k)^2).$$

Теорема 13. *Набор функций* $\{\Psi_{[\gamma],k}, \gamma \in \Gamma^*\backslash\{0\}\} \cup \{1, \cos k\pi z, \sin k\pi z\}$ *где* $k \in \mathbb{N}$ *образует собственный базис оператора Лапласа–Бельтрами в пространстве* $L_2(M_A^{n+1})$. *При этом функции* $\Psi_{[\gamma],k}$ *отвечает собственное значение* $\mathcal{E}_{[\gamma],k}$, *являющееся собственным значением оператора Шредингера на прямой с потенциалом* $Q_\gamma(z)$ *(2.6).*

Доказательство. Ортогональность и независимость этих функций очевидна. Нам остается проверить, что указанный набор функций является полным в $L_2(M_A^{n+1})$.

Известно [3, 25], что если M — компактное риманово многообразие, то в $L_2(M)$ существует ортонормированный базис, состоящий из бесконечно дифференцируемых собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа (это следует из эллиптичности оператора). Поэтому для доказательства полноты достаточно показать, что если гладкая функция $\Phi \in L^2(M_A^{n+1})$ ортогональна всем функциям из нашего набора, то она, на самом деле, тождественно равна нулю [20].

Аналогично случаю окружности $S^1 = \mathbb{T}^1$, система функций

$$\{\phi_\gamma(u) = e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle}, \ \gamma \in \Gamma^*\}$$

образует полный ортогональный набор в $L_2(\mathbb{T}^n)$, $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$ [20]. Поэтому каждый элемент $\Phi \in L_2(M_A^{n+1})$ можно представить в виде ряда

$$\Phi(u,z) = \sum_{\gamma\in\Gamma^*} e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} c_\gamma(z).$$

Это ряд Фурье функции Φ по ортогональной системе $\{\phi_\gamma\}$. Коэффициенты Фурье c_γ определяются формулой

$$c_\gamma(z) = \frac{1}{||\phi_\gamma||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \Phi(u,z)\overline{\phi_\gamma(u)}d\mu.$$

Без ограничения общности, мы можем рассмотреть Φ как функцию на цилиндре $\mathcal{C}^{n+1}$. Тогда c_γ будет некоторой гладкой функцией на прямой.

Лемма 14. *Если $\gamma \neq 0$, то $c_\gamma \in Ł_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Так как $\Phi \in L^2(M_A^{n+1})$, то $\Phi(Au, z+1) = \Phi(u,z)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in\Gamma^*} e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} c_\gamma(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma^*} e^{2\pi i\langle\gamma,Au\rangle} c_\gamma(z+1) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma^*} e^{2\pi i\langle A^*\gamma,u\rangle} c_\gamma(z+1) = \sum_{\gamma\in\Gamma^*} e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} c_{(A^*)^{-1}\gamma}(z+1).
\end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты Фурье удовлетворяют следующему условию:

$$c_\gamma(z+1) = c_{A^*\gamma}(z).$$

Или в более общем виде

$$c_\gamma(z+n) = c_{(A^*)^n\gamma}(z), \;\; n\in\mathbb{Z}.$$

Если $\gamma \neq 0$, то из гиперболичности матрицы A следует, что $(A^*)^n\gamma \to \infty$ при $n \to \pm\infty$. Хорошо известно, что коэффициенты Фурье тем быстрее стремятся к нулю, чем лучше дифференциальные свойства рассматриваемой функции. В частности, если некоторая функция имеет k производных, то ее коэффициенты Фурье c_n удовлетворяют следующей оценке: $c_n = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ при $n \to \pm\infty$ [1]. Поэтому в нашем случае будем иметь

$$c_{(A^*)^n\gamma}(z) = o\left(\frac{1}{|(A^*)^n\gamma|^k}\right) = o\left(\frac{1}{(\Lambda^n)^k}\right),\ n \to \pm\infty,$$

где Λ максимальное собственное значение матрицы A. В силу гиперболичности $\Lambda > 1$. Из этой оценки и предыдущего равенства следует, что коэффициенты c_γ стремятся к нулю на бесконечности достаточно быстро для того, чтобы принадлежать $L_2(\mathbb{R})$. $\square$

Пусть теперь Φ ортогональна всем функциям $\{\Psi_{[\gamma_0],k},\ \gamma_0 \in \Gamma^* \setminus \{0\}\}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \Phi, \Psi_{[\gamma_0],k}\rangle_{L^2(M_A^{n+1})} = \int\limits_{M_A^{n+1}} \Phi(u,z)\bar{\Psi}_{[\gamma_0],k}(u,z)d\sigma \\
&= \int\limits_{M_A^{n+1}} \sum_{\gamma\in\Gamma^*} e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} c_\gamma(z) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i\langle(A^*)^n\gamma_0,u\rangle}\bar{F}_{(A^*)^n\gamma_0,k}(z)d\sigma \\
&= \int\limits_0^1 \sum_{\gamma\in\Gamma^*,n\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} e^{-2\pi i\langle(A^*)^n\gamma_0,u\rangle}d\mu\right) c_\gamma(z)\bar{F}_{(A^*)^n\gamma_0,k}(z)dz \\
&= \int\limits_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i\langle(A^*)^n\gamma_0,u\rangle} e^{-2\pi i\langle(A^*)^n\gamma_0,u\rangle}d\mu\right) c_{(A^*)^n\gamma_0}(z)\bar{F}_{(A^*)^n\gamma_0,k}(z)dz \\
&= \operatorname{area}(\mathbb{T}^n)\int\limits_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{(A^*)^n\gamma_0}(z)\bar{F}_{(A^*)^n\gamma_0,k}(z)dz \\
&= \operatorname{area}(\mathbb{T}^n)\int\limits_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{\gamma_0}(z+n)\bar{F}_{\gamma_0,k}(z+n)dz \\
&= \operatorname{area}(\mathbb{T}^n)\int\limits_{\mathbb{R}} c_{\gamma_0}(z)\bar{F}_{\gamma_0,k}(z)dz = \operatorname{area}(\mathbb{T}^n)\cdot\langle c_{\gamma_0}, F_{\gamma_0,k}\rangle_{L_2(R)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент Фурье c_{γ_0} принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ при $\gamma_0 \neq 0$ и ортогонален ко всем функциям $F_{\gamma_0,k}$, которые образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$. Следовательно, $c_{\gamma_0} \equiv 0$ для

$\gamma_0 \neq 0$. Поэтому функция Φ имеет вид $\Phi(u, z) = c_0(z)$, где c_0 1-периодическая функция. Теперь пользуясь тем, что Φ ортогональна ко всем функциям $\{\cos k\pi z, \sin k\pi z\}$, $k \in \mathbb{N}$, которые образуют полный набор в $L_2(S^1)$, получаем, что и $c_0 \equiv 0$. Полнота, а вместе с ней и теорема, доказаны. $\square$

Литература

[1] Бари Н. К., *Тригонометрические ряды*, М.: Физматгиз, 1961.

[2] Березин Ф. А., Шубин М. А., *Уравнение Шредингера*, М.: МГУ, 1983.

[3] Бессе А., *Многообразия с замкнутыми геодезическими*, М.: Мир, 1981.

[4] Богоявленский О. И., *Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1984, 48:5, 883–938.

[5] Болсинов А. В., *Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента*, ДАН СССР, 1988, т.301, № 5. с.1037-1040.

[6] Болсинов А. В., *Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции*, Известия АН. СССР, Сер. матем., 1991, 55, № 1, 68-92.

[7] Болсинов А. В., *Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко*, Труды семинара по вект. и тенз. анализу, Вып. 26, М.:МГУ, 2005, 87-109.

[8] Болсинов А. В., Тайманов И. А., *О примере интегрируемого геодезического потока с положительной топологической энтропией*, УМН, 1999, 54:4(328), 157–158.

[9] Болсинов А. В., Тайманов И. А., *Интегрируемы геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов*, Труды МИРАН. 2000. Т. 231. С. 46-63.

[10] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., *Теория чисел*, М.: Наука, Гл. ред. физ-мат лит., 1985.

[11] Винберг Э. Б., Онищик А. Л., *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, М., Наука, 1988.

[12] Винберг Э. Б., Попов В. Л., *Теория инвариантов*, Итоги науки и техн., ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направ., 1989, 55, 137-309.

[13] Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*, М.: Наука, 1966.

[14] Гельфанд И. М., Захаревич И. С., *Спектральная теория пучка кососимметрических дифференциальных операторов 3-го порядка на* S^1, Функц. анализ и его прил., 1989, 23:2, 1–11.

[15] Гото М., Гроссханс Ф., *Полупростые алгебры Ли*, М., Мир, 1981.

[16] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., *Современная геометрия. Геометрия и топология многообразий*, М.: Эдиториал УРСС, 1998.

[17] Желобенко Д. П., *Компактные группы Ли и их представления*, Мир, 1978.

[18] Зуев К. М., *Спектр оператора Бельтрами–Лапласа на надстройках автоморфизмов торов*, Матем. сб., 2006, 197:9, 43–54.

[19] Кириллов А. А., *Лекции по методу орбит*, Новосибирс, Науч. книга, 2002.

[20] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, М.: Наука, Гл. ред. физ-мат лит., 1976.

[21] Короткевич А., *Полные коммутативные наборы полиномов на алгебрах Ли малой размерности.*

[22] Манаков С. В., *Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела*, Функц. анализ и его прил., 1976, 10:4, 93–94

[23] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли*, Изв. АН СССР. Сер. Матем., т.42, № 2, 1978, 396-415.

[24] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., *Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями*, Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып.20, М.:МГУ, 1981, 5-54.

[25] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики. Анализ операторов*, М.: Мир, 1982.

[26] Садэтов С. Т., *Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко*, Доклады РАН, 2004, 397 № 6, 751-754.

[27] Стернберг С., *Лекции по дифференциальной геометрии*, М.: Мир, 1970.

[28] Тайманов И. А., *Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1987, 51:2, 429–435.

[29] Тайманов И. А., *О топогических свойствах интегрируемых геодезических потоков*, Матем. заметки, 1988, 44:2, 283–284.

[30] Трофимов В. В., Фоменко А. Т., *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, М.:Факториал, 1995.

[31] Шафаревич И. Р., *Основы алгебраической геометрии*, т.1. М., Наука, 1988.

[32] Abellanas L., Alonso L. M., *A general setting for Casimir invariants*, J. Math. Phys., Vol. 16, No. 8, 1975, 1580-1584.

[33] Bolsinov A. V., *Complete commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras: a proof of the Mischenko–Fomenko conjecture*, 2008, revised and extended version of [7]

[34] Bolsinov A. V., Dullin H. R., Veselov A. P., *Spectra of Sol-manifolds: arithmetic and quantum monodromy*, Comm. Math. Phys., 2006, V.264, pp.583- 611.

[35] Buser P., *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1992. (Progress in Mathematics; 106).

[36] Butler L., *A new class of homogeneous manifolds with Liouville-integrable geodesic flows.* C.R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. 21(4):127–131, 1999.

[37] Dixmier J., *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, II*, Bull. Soc. Math. France 85 (1957), 325-388; Russian translation in Matematika, 5 (1961), 1.

[38] Frobenius G., *Über das Pfaffsche probleme*, J. für Reine und Agnew. Math., 82, 1877, 230-315.

[39] Gelfand I. M., Zakharevich I., *Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bihamiltonian Toda and Lax structures*, math.DG/9903080 v3 27 Mar 2000.

[40] Kac M., *Can one hear the shape of a drum?* Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73. P. 1–23.

[41] Morozov V.V., Izv. Vysshikh. Uchebn. Zavedenii Mat., 4(5) 161, 1958.

[42] Mubarakzyanov G.M., Izv. Vysshikh. Uchebn. Zavedenii Mat., 1(33) 114, 1963.

[43] Mubarakzyanov G.M., Izv. Vysshikh. Uchebn. Zavedenii Mat., 3(34) 99, 1963.

[44] Mubarakzyanov G.M., Izv. Vysshikh. Uchebn. Zavedenii Mat., 4(35) 104, 1963.

[45] Panyushev D. I., Yakimova O. S., *The argument shift method and maximal commutative subalgebras of Poisson algebras*, arXive:math.RT/0702583v1.

[46] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., *Invariants of real low dimension Lie algebras.* Journal of Mathematical Physics, Vol. 17, N6., June 1976.

[47] Paternain G. P., *On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows*, Ergod. Theory Dynam. Syst. 12 (1992), 109–121.

[48] Paternain G. P., *On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows II*, J. Geom. Phys. 13 (1994), 289– 298.

[49] Praught J., Smirnov R. G., *Andrew Lenard: A Mystery Unraveled*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, Vol. 1 (2005).

[50] Rosenlicht M., *Some basic theorems on algebraic groups*, Amer. J. Math., 1956, 78, 401-443.

[51] Thompson R. C., *Pencils of complex and real symmetric and skew matrices*, Linear algebra and its applications, 147:323-371(1991).

[52] Turnbull H. W., Aitken A. C., *An introduction to the theory of canonical matrices*, Dover Publications Inc., New York, 1961.