Remarque 5.7. — Il n'est pas connu à l'heure actuelle si le groupe fondamental d'un schéma propre sur un corps algébriquement clos k est topologiquement de présentation finie[(8)]. Utilisant 5.3, une technique bien connue de sections hyperplanes, et la désingularisation des surfaces normales, on est ramené au cas d'une *surface lisse sur* k. Cela permet du moins de montrer, par voie transcendante, que la réponse est affirmative en caractéristique 0 (et ceci sans être obligé d'admettre la triangulabilité de variétés algébriques singulières). En caractéristique $p > 0$, la difficulté principale semble dans le cas des courbes, dont on sait seulement que le groupe fondamental est un quotient de celui qui se présente dans le cas classique (cf. exposé suivant), le noyau par lequel on divise étant cependant fort mal connu.

Remarque 5.8. — On pourrait expliciter d'autres cas particuliers que 5.4 et 5.6 où 5.1 prend une forme particulièrement simple. Un cas intéressant est celui où S est le quotient de S' par un groupe fini d'automorphismes Γ. *Alors la catégorie des revêtements étales de* S' *est équivalente à la catégorie des revêtements étales* X' *de* S', *où le groupe* Γ *opère de façon compatible avec ses opérations sur* S', *de telle façon que pour tout* $s' \in S'$ *et tout* $g \in \Gamma_{s'}$ (où $\Gamma_{s'}$ désigne *le groupe d'inertie* de s' dans Γ), g *opère trivialement dans la fibre* $X'_{s'}$. Si S' est connexe cet énoncé s'interprète de la façon suivante. Soit C'_0 la catégorie des revêtements étales de S' où Γ opère de façon compatible avec ses opérations sur S' (mais sans satisfaire nécessairement la condition ci-dessus sur les groupes d'inertie des points de S'). On voit facilement que c'est une catégorie galoisienne (V 5), et que pour tout point géométrique a' de S', le foncteur 251
fibre $X' \mapsto X'_{a'}$ sur C'_0 est un foncteur fondamental. Soit $\pi_1(S', \Gamma; a') = G$ le groupe des automorphismes de ce foncteur, muni de sa topologie habituelle. On a alors une suite exacte canonique

$$e \longrightarrow \pi_1(S', a') \longrightarrow G \longrightarrow \Gamma \longrightarrow e$$

(cas particulier de (V 6.13), où on prend pour S le revêtement trivial $S' \times \Gamma$ de S' défini par Γ, où on fait opérer Γ de façon évidente). D'ailleurs pour tout point géométrique b' de S', on a un isomorphisme $\pi_1(S', \Gamma; b') \to G = \pi_1(S', \Gamma; a')$ défini à automorphisme intérieur près provenant de $\pi_1(S', a')$, et comme $\Gamma_{b'}$ s'applique de façon évidente dans le premier membre, on obtient un homomorphisme

$$u_{b'} : \Gamma_{b'} \longrightarrow G,$$

défini à automorphisme intérieur près (provenant de $\pi_1(S', a')$), dont le composé avec l'homomorphisme canonique $G \to \Gamma$ est d'ailleurs l'immersion canonique $\Gamma_{b'} \to \Gamma$. Ceci posé, *le groupe fondamental* $\pi_1(S, a)$ est *canoniquement isomorphe au groupe*

(8) Cela semble très improbable dans le cas des courbes lisses de genre $g \geqslant 2$, en caractéristique $p > 0$. Quand on remplace π_1 par son plus grand quotient premier à p, par contre, il semble que les techniques bien connues permettent de donner une réponse affirmative, même sans hypothèse de propreté. Cf. un travail en préparation de J.P. Murre.

quotient de $G = \pi_1(S', \Gamma; a')$ *par le sous-groupe invariant fermé engendré par les images des homomorphismes* $\Gamma_{b'} \to G$. En particulier, l'image de $\pi_1(S', a')$ dans $\pi_1(S, a)$ est un sous-groupe invariant, et le quotient correspondant est isomorphe à un quotient de Γ. On peut d'ailleurs réduire le nombre des « relations » introduites en introduisant, pour tout $g \in \Gamma$, $g \neq e$, le sous-préschéma S'_g des coïncidences des automorphismes id_S et g de S, en choisissant un point géométrique $b'_{g,i}$ dans chaque composante connexe de S'_g, puis un des homomorphismes correspondants $\pi_1(S', \Gamma; b'_{g,i}) \to G$, d'où des relèvements $\overline{g}_i$ de g dans G. Il suffit alors de prendre le quotient de G par le sous-groupe invariant fermé de G engendré par les $\overline{g}_i$.

Lorsque a' est invariant par Γ, on voit aisément que Γ opère de façon naturelle sur $\pi_1(S', a')$, et G s'identifie au produit semi-direct correspondant. Identifiant alors Γ
252 à un sous-groupe de G, on voit que dans les relations introduites plus haut, faisant $b' = a'$, on trouve « $g = e$ » pour $g \in I$. Donc *si* S' *a un point géométrique* a' *fixe par* I (i.e. un point s' dont le groupe d'inertie est Γ), *alors* $\pi_1(S, a)$ *est un groupe quotient du groupe quotient de type galoisien de* $\pi_1(S', a')$ *obtenu en* « rendant triviales » *les opérations de* Γ *sur* $\pi_1(S', a')$ *; et il est même isomorphe à ce dernier groupe si on suppose que pour tout* $g \in G$*, l'ensemble d'inertie* S'_g *est connexe, donc passe par la localité de* a'. Cette dernière assertion est en effet contenue dans la deuxième description donnée plus haut pour les relations à introduire dans G.

Ce dernier résultat s'applique en particulier si l'on prend pour S' la puissance cartésienne X^n d'un préschéma connexe sur un corps algébriquement clos, pour Γ le groupe symétrique $\Gamma = \mathfrak{S}_n$, opérant de la façon habituelle, d'où pour S la puissance symétrique n-ième de S. Prenant alors pour a' un point géométrique localisé en la diagonale, on est sous les conditions précédentes, les ensembles d'inertie S'_g contenant en effet tous la diagonale. Utilisant le fait, prouvé dans l'exposé suivant, que si X est propre connexe sur k, le groupe fondamental de X^n s'identifie à $\pi_1(X)^n$, on trouve le résultat amusant suivant : *Si* X *est propre connexe sur* k *algébriquement clos, le groupe fondamental de sa puissance symétrique* n*-ième ,* $n \geqslant 2$*, est isomorphe au groupe fondamental de* X *rendu abélien.* (J'ignore si le fait analogue en Topologie algébrique est connu ; il devrait pouvoir s'établir par la même méthode de descente). Prenons par exemple pour X une courbe rationnelle $X = \mathbf{P}^1_k$, on trouve une N-ième démonstration du fait que $\mathbf{P}^r_k$ est simplement connexe, utilisant le fait que $\mathbf{P}^1_k$ l'est. Prenons maintenant pour X une courbe simple sur k, et $n \geqslant 2g - 1$, de sorte que $\mathrm{Symm}^n(X)$ est fibré sur la jacobienne J, de fibres des espaces projectifs, donc (comme on verra à l'aide des résultats des deux exposés suivants) a même groupe fondamental que J. On retrouve alors sans dévissage le fait bien connu que *le groupe fondamental de la jacobienne de* X *est isomorphe au groupe fondamental de* X *rendu abélien.*