УДК 517.927.25

К. М. Зуев

Спектр оператора Бельтрами–Лапласа на надстройках автоморфизмов торов

Статья посвящена исследованию спектра и собственного базиса оператора Бельтрами–Лапласа на надстройках автоморфизмов торов. Описание дается в терминах решений одномерного уравнения Шрёдингера.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Существует хорошо известная проблема распознавания римановых многообразий по спектру их оператора Бельтрами–Лапласа, которая, как принято считать, была сформулирована в 1966 г. в работе [1] в виде знаменитого вопроса: "Можно ли услышать форму барабана?" [1]. Проблема состоит в эквивалентности изоспектральности и изометричности многообразий: будут ли многообразия, имеющие одинаковый спектр, изометричны? В общем случае ответ зависит от геометрии многообразия [2]. В связи с этим задача об описании спектра риманова многообразия сама по себе является весьма актуальной.

В настоящей статье мы продолжаем исследования, начатые А. В. Болсиновым, И. А. Таймановым, А. П. Веселовым и Х. Р. Дуллиным в работах [3], [4].

В статье [3] изучаются геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов. Замкнутое многообразие M_A^{n+1} называется *надстройкой автоморфизма* $A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, если существует расслоение

$$p\colon M_A^{n+1} \xrightarrow{\overset{A}{\curvearrowright}\atop \mathbb{T}^n} S^1$$

многообразия над окружностью S^1 со слоем тор $\mathbb{T}^n$ такое, что монодромия расслоения задается матрицей $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$. Многообразие M_A^{n+1} обладает интересными свойствами. Оказывается, что на M_A^{n+1} существует вещественно-аналитическая риманова метрика, геодезический поток которой хотя и интегрируем по Лиувиллю при помощи гладких интегралов, но имеет ненулевую топологическую энтропию.

Квантовым аналогом задачи об интегрируемости геодезического потока на многообразии является описание спектра и собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа. В статье [4] авторами построен базис в пространстве $L_2(M_A^3)$, состоящий из собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа, которые описываются при помощи решений так называемого модифицированного уравнения Матье.

[1] "Can one hear the shape of a drum?"

В настоящей работе мы рассматриваем многомерную ситуацию $n > 2$, и главным результатом является описание спектра и построение собственного базиса для оператора Бельтрами–Лапласа на $L_2(M_A^{n+1})$, который описывается при помощи решений одномерного уравнения Шрёдингера.

§ 2. Построение римановой метрики на M_A^{n+1}

Надстройку автоморфизма тора M_A^{n+1} можно определить следующим образом. Рассмотрим цилиндр $\mathscr{C}^{n+1} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ – стандартные координаты на $\mathbb{T}^n$, определенные по модулю 1, и z – координата на прямой. Рассмотрим действие дискретной группы $\mathbb{Z}$ на цилиндре, порожденное следующим преобразованием T_A:

$$T_A\colon (x, z) \mapsto (Ax, z + 1), \tag{1}$$

где целочисленная матрица A определяет автоморфизм тора $A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$. Теперь соответствующее многообразие M_A^{n+1} определяется как фактор цилиндра по этому действию: $M_A^{n+1} = \mathscr{C}^{n+1}/\mathbb{Z}$.

Далее мы будем предполагать, что $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ является гиперболической матрицей (по определению это означает, что для любого ее собственного значения λ выполнено $|\lambda| \neq 1$) с положительным спектром $\operatorname{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

Вместо стандартных периодических координат $(x_1, \dots, x_n)$ на $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ нам будет удобно пользоваться другими линейными координатами на торе, которые будут согласованы с действием гиперболического автоморфизма A. Пусть спектр $\operatorname{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ и n_α – кратность собственного значения λ_α, $\alpha = 1, \dots, k$. Тогда в некотором базисе $\{f_i\}_{i=1}^n$ (состоящем из собственных и присоединенных векторов) матрица A будет иметь жорданову нормальную форму:

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{pmatrix},$$

где B_α – жорданова клетка порядка n_α:

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_\alpha \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $(u_1, \dots, u_n)$ координаты на торе, соответствующие базису $\{f_i\}_{i=1}^n$. Заметим, что новые координаты не являются периодическими на торе: $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $\widehat{u} = (\widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_n)$ определяют одну и ту же точку на $\mathbb{T}^n$ тогда и только тогда, когда $u - \widehat{u} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, где $a_i \in \mathbb{Z}$ и $\{e_i\}$ – базис решетки Γ, ассоциированной с $\mathbb{T}^n$.

Риманову метрику на M_A^{n+1} построим следующим образом. Сначала определим метрику на цилиндре $\mathscr{C}^{n+1}$. Положим

$$ds^2 = g_{ij}(z)\, du^i du^j + dz^2,$$

где
$$G(z) = (g_{ij}(z)) = (e^{-z \ln A})^T G_0 e^{-z \ln A}.$$
Здесь G_0 – произвольная положительно определенная симметричная матрица порядка n (матрица метрики на нулевом слое $\{z = 0\}$), а $\ln A$ – вещественная однозначная ветвь логарифма, которая существует, так как $\operatorname{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Очевидно, что определенная таким образом метрика на цилиндре является инвариантной относительно описанного действия дискретной группы. Следовательно, эта метрика редуцируется до метрики на факторпространстве $M_A^{n+1} = \mathscr{C}^{n+1}/\mathbb{Z}$.

§ 3. Оператор Бельтрами–Лапласа на M_A^{n+1}

Оператор Бельтрами–Лапласа – это оператор $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$, который на римановом многообразии представляется в виде
$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det G}}\, \partial_i (g^{ij} \sqrt{\det G}\, \partial_j),$$
где ∂_i – частная производная по i-й координате, G – метрический тензор и g^{ij} – компоненты обратного тензора в локальных координатах.

В нашем случае $\det G = \det G_0$. Так как матрица A унимодулярна, то в координатах $(u_1, \dots, u_n, z)$ оператор Бельтрами–Лапласа на многообразии M_A^{n+1} записывается в следующем виде:
$$\Delta = g^{ij}(z) \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,,$$
где
$$G^{-1}(z) = (g^{ij}(z)) = e^{z \ln A} G_0^{-1} (e^{z \ln A})^T.$$
Вычисления показывают, что
$$G^{-1}(z) = \begin{pmatrix} e^{z \ln B_1} G_0^{11} e^{z \ln B_1^T} & \dots & e^{z \ln B_1} G_0^{1k} e^{z \ln B_k^T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{z \ln B_k} G_0^{k1} e^{z \ln B_1^T} & \dots & e^{z \ln B_k} G_0^{kk} e^{z \ln B_k^T} \end{pmatrix},$$
где $G_0^{-1} = (G_0^{\alpha\beta})$ – разбиение на подматрицы, индуцированное разбиением матрицы A на жордановы клетки.

Матрица $e^{z \ln B_\alpha} G_0^{\alpha\beta} e^{z \ln B_\beta^T} \in \operatorname{Mat}(n_\alpha, n_\beta)$ и имеет вид
$$e^{z \ln B_\alpha} G_0^{\alpha\beta} e^{z \ln B_\beta^T} = e^{z \ln \lambda_\alpha \lambda_\beta} P_{\alpha\beta}(z), \qquad P_{\alpha\beta}(z) \in \operatorname{Mat}(n_\alpha, n_\beta).$$
Элементы $p_{ij}^{\alpha\beta}$ матрицы $P_{\alpha\beta}(z)$ являются полиномами от координаты z, степени которых $\deg p_{ij}^{\alpha\beta}(z) = n_\alpha + n_\beta - i - j$ приведены в таблице:

$n_\alpha + n_\beta - 2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$n_\alpha - 1$
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$\vdots$	$\ddots$	4	3	2
$\vdots$	$\ddots$	3	2	1
$n_\beta - 1$	$\dots$	2	1	0

Таким образом, в координатах $(u_1, \dots, u_n, z)$ оператор Бельтрами–Лапласа на M_A^{n+1} имеет вид

$$\Delta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{(k,k)} \sum_{i,j=1}^{(n_\alpha,n_\beta)} e^{z\ln\lambda_\alpha\lambda_\beta} p_{ij}^{\alpha\beta}(z) \frac{\partial^2}{\partial u_\xi \partial u_\eta} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,, \tag{2}$$

$$\xi = \xi(\alpha, i) = \sum_{s=1}^{\alpha-1} n_s + i, \qquad \eta = \eta(\beta, j) = \sum_{s=1}^{\beta-1} n_s + j.$$

Здесь индексы α и β определяют подматрицу в $G^{-1}(z)$, а индексы i и j – элемент внутри этой подматрицы.

§ 4. Спектр и собственные функции оператора Бельтрами–Лапласа

Квантовым аналогом задачи об интегрируемости геодезического потока римановой метрики на многообразии является описание спектра и собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа, отвечающего этой метрике,

$$-\Delta\Psi = \mathscr{E}\Psi. \tag{3}$$

В нашем случае $\Psi \in L_2(M_A^{n+1})$, а Δ – описанный выше оператор Бельтрами–Лапласа на $L_2(M_A^{n+1})$.

Так как коэффициенты Δ зависят только от z, то вполне естественно разделить переменные и искать собственные функции Δ в виде

$$\Psi_\gamma(u, z) = e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} F(z), \tag{4}$$

где $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i^* \in \Gamma^*$, $\gamma_i \in \mathbb{Z}$, – элемент двойственной решетки тора, а $F \in L_2(\mathbb{R})$. Заметим, что спаривание $\langle\gamma, u\rangle$ определено по модулю $\mathbb{Z}$:

$$\langle\gamma, u\rangle = \left\langle \gamma, u + \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\rangle = \langle\gamma, u\rangle + \sum_{i=1}^n \gamma_i a_i.$$

Но так как $e^{2\pi i\mathbb{Z}} = 1$, функция $\Psi_\gamma(u, z)$ определена корректно на M_A^{n+1}.

Подставляя теперь (4) в уравнения (3), (2), получаем

$$-\frac{d^2F(z)}{dz^2} + Q_\gamma(z)F(z) = \mathscr{E}F(z), \tag{5}$$

$$Q_\gamma(z) = (2\pi)^2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{(k,k)} \sum_{i,j=1}^{(n_\alpha,n_\beta)} e^{z\ln\lambda_\alpha\lambda_\beta} p_{ij}^{\alpha\beta}(z) \langle\gamma, f_\xi\rangle\langle\gamma, f_\eta\rangle. \tag{6}$$

Таким образом, задача о поиске спектра и собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа на Sol-многообразии M_A^{n+1} свелась к одномерному уравнению Шрёдингера (5) на прямой с потенциалом $Q_\gamma(z)$. В случае $n = 2$ уравнение (5) приводится к так называемому модифицированному уравнению Матье [4].

Свойства одномерного уравнения Шрёдингера (5) хорошо изучены. Известно [5], что если потенциал $Q_\gamma(z) \to +\infty$ при $|z| \to \infty$, то существует полная ортонормированная система собственных функций $F_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, оператора $-d^2/dz^2 + Q_\gamma(z)$, принадлежащих $L^2(\mathbb{R})$, собственные значения которых $\mathscr{E}_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Лемма 1. *Если* $\gamma \neq 0$, *то* $Q_\gamma(z) \to +\infty$ *при* $|z| \to \infty$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$Q_\gamma(z) = (2\pi)^2 \cdot (\langle \gamma, f_1 \rangle, \dots, \langle \gamma, f_n \rangle) G^{-1}(z) \begin{pmatrix} \langle \gamma, f_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \gamma, f_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Поэтому $Q_\gamma(z) > 0$ при $\gamma \neq 0$, так как метрика положительно определена и вектор $(\langle \gamma, f_1 \rangle, \dots, \langle \gamma, f_n \rangle) \neq 0$ при $\gamma \neq 0$.

Пусть $z \to +\infty$ (случай $z \to -\infty$ рассматривается аналогично).

Из (6) следует, что потенциал $Q_\gamma(z)$ является линейной комбинацией функций вида $e^{\mu z} q(z)$, где $\mu \in \mathbb{R}$, а $q(z)$ – полином. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что в этой линейной комбинации (после приведения всех подобных членов) найдется слагаемое такое, что $\mu > 0$. Действительно, тогда, в зависимости от полиномиального сомножителя, это слагаемое будет стремиться к $\pm\infty$, а следовательно, и $Q_\gamma(z) \to \pm\infty$. Но так как $Q_\gamma(z) > 0$, то останется лишь возможность $Q_\gamma(z) \to +\infty$. Докажем, что такое слагаемое существует.

Пространство $\mathbb{R}^n$, в котором действует гиперболический оператор A, распадается в сумму двух инвариантных подпространств:

$$\mathbb{R}^n = V_A^- \oplus V_A^+, \qquad V_A^- = \bigoplus_{\lambda<1} V_\lambda, \quad V_A^+ = \bigoplus_{\lambda>1} V_\lambda.$$

Через V_λ обозначено корневое подпространство, соответствующее λ.

Лемма 2. *Если гиперболическая матрица* $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, *то*

$$\mathrm{Ann}(V_A^+) \cap \Gamma^* = 0.$$

Доказательство. Так как $\mathbb{R}^n = V_A^- \oplus V_A^+$, то $\mathrm{Ann}(V_A^+) = (V_A^-)^*$. Поэтому имеем:

$$\mathrm{Ann}(V_A^+) \cap \Gamma^* = (V_A^-)^* \cap \Gamma^* = (V_A^- \cap \Gamma)^*.$$

Так как $V_A^- \cap \Gamma$ является подгруппой аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ и множество ее точек дискретно, то $V_A^- \cap \Gamma$ является решеткой [6]. Кроме того, $V_A^- \cap \Gamma$ инвариантно относительно A. Таким образом, $V_A^- \cap \Gamma$ – A-инвариантная подрешетка Γ.

Пусть существует ненулевой $v \in V_A^- \cap \Gamma$. Тогда $A^n v \in V_A^- \cap \Gamma$ для любых $n \in \mathbb{N}$. С одной стороны, так как множество $V_A^- \cap \Gamma$ дискретно, существует проколотая окрестность нуля U в $\mathbb{R}^n$ такая, что она не содержит ни одной точки из $V_A^- \cap \Gamma$. А с другой стороны, так как V_A^- состоит из векторов v, для которых $A^n v \to 0$ при $n \to \infty$, для всех n начиная с некоторого $A^n v \in U$. Противоречие. Поэтому $V_A^- \cap \Gamma = 0$, а следовательно, и $\mathrm{Ann}(V_A^+) \cap \Gamma^* = 0$. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что для любой точки $\gamma \neq 0$ двойственной решетки в базисе $\{f_i\}_{i=1}^n$ существует вектор $f_0 \in V_{\lambda_0} \subset V_A^+$, для которого $\langle \gamma, f_0 \rangle \neq 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $f_0 = f_1$ и $\lambda_0 = \lambda_1$. Тогда

$$Q_\gamma(z) = (2\pi)^2 e^{2z \ln \lambda_1} p_{11}^{11}(z) \langle \gamma, f_1 \rangle^2 + \cdots .$$

Остается заметить, что полином $p_{11}^{11}(z)$ не является тождественным нулем, поскольку $p_{11}^{11}(0) = (G_0^{-1})_{11} > 0$ как диагональный элемент положительно определенной матрицы G_0^{-1}. Лемма 1 доказана.

Таким образом, каждому элементу $\gamma \in \Gamma^* \setminus \{0\}$ мы сопоставили серию собственных функций и собственных значений оператора Бельтрами–Лапласа на цилиндре $\mathscr{C}^{n+1}$:

$$\gamma \mapsto (\Psi_{\gamma,k}, \mathscr{E}_{\gamma,k}),$$
$$\Psi_{\gamma,k}(u,z) = e^{2\pi i \langle \gamma, u \rangle} F_{\gamma,k}(z).$$

Однако функции $\Psi_{\gamma,k}$ не являются корректно определенными функциями на $M_A^{n+1} = \mathscr{C}^{n+1}/\mathbb{Z}$, так как они не инвариантны относительно действия (1) дискретной группы на цилиндре. Естественным соображением является усреднить функции по этому действию, т.е. вместо $\Psi_{\gamma,k}$ рассмотреть ряд

$$\Psi_{\gamma,k}(u,z) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n) =: \widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z). \tag{7}$$

Преобразование $(u,z) \mapsto (Au, z+1)$ является изометрией, следовательно, оно сохраняет оператор Лапласа. Поэтому функция $\Psi_{\gamma,k}^{(n)}(u,z) := \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n)$ будет решением уравнения (3) с тем же собственным значением $\mathscr{E}_{\gamma,k}$.

Теперь можно написать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \Delta \widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z) &= \Delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Delta \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{E}_{\gamma,k} \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n) = \mathscr{E}_{\gamma,k} \widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z). \end{aligned} \tag{8}$$

Чтобы эти равенства из формальных превратились в осмысленные утверждения, необходимо доказать, что ряд (7) сходится к функции, корректно определенной на M_A^{n+1}, и что оператор Бельтрами–Лапласа коммутирует с операцией суммирования.

Известно [5], что для любого решения уравнения

$$-\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + v(z) f(z) = 0, \qquad v(z) \to +\infty, \quad |z| \to +\infty,$$

выполнено одно из условий:

1) для любого $\alpha > 0$ существует M такое, что $|f(z)| \geqslant e^{\alpha |z|}$ при $|z| \geqslant M$;
2) для любого $\alpha > 0$ существует M такое, что $|f(z)| \leqslant e^{-\alpha |z|}$ при $|z| \geqslant M$.

В нашем случае (5) в силу леммы 1 $v(z) = Q_\gamma(z) - \mathscr{E} \to +\infty$ при $|z| \to +\infty$. Кроме того, все собственные функции $F_{\gamma,k}(z) \in L^2(\mathbb{R})$, поэтому для одномерного уравнения Шрёдингера с растущим потенциалом может реализоваться только случай 2).

Таким образом, существует $M = M(\gamma, k)$ такое, что для всех $|z| > M$ выполнено

$$|F_{\gamma,k}(z)| \leqslant e^{-|z|}. \tag{9}$$

Докажем теперь несколько простых утверждений, обосновывающих равенства (8).

Лемма 3. *Ряд*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n)$$

сходится поточечно на цилиндре $\mathscr{C}^{n+1} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $(u_0, z_0) \in \mathscr{C}^{n+1}$. Тогда

$$\Bigl|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma,k}(A^n u_0, z_0+n)\Bigr| = \Bigl|\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i\langle\gamma, A^n u_0\rangle} F_{\gamma,k}(z_0+n)\Bigr| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_{\gamma,k}(z_0+n)|.$$

Используя оценку (9), имеем

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_{\gamma,k}(z_0+n)| \leqslant (e^{z_0} + e^{-z_0})e^{-M-1}\frac{e}{e-1} + \sum_{n=-M}^{M} |F_{\gamma,k}(z_0+n)|$$

для достаточно большого M. Последнее неравенство доказывает утверждение леммы 3.

Таким образом, функция $\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}$ является корректно определенной функцией на $\mathscr{C}^{n+1}$. Кроме того, легко видеть, что $\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}$ является также функцией и на факторе $\mathscr{C}^{n+1}/\mathbb{Z}$, так как она инвариантна относительно преобразования $(u,z) \mapsto (Au, z+1)$.

Лемма 4. 1) *Ряд* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z)$ *сходится равномерно на* $\mathbb{T}^n \times [0,1]$;

2) $\Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z) \in L_2(\mathscr{C}^{n+1}) \subset L_2(\mathbb{T}^n \times [0,1])$;

3) $\widetilde{\Psi}_{\gamma,k} \in L_2(M^{n+1}_A)$.

Доказательство. Для доказательства п. 1) необходимо и достаточно показать, что остаток ряда равномерно стремится к нулю на $\mathbb{T}^n \times [0,1]$. Из доказательства леммы 3 следует, что остаток ряда

$$\sum_{|n|>M} \Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z) \leqslant (e^z + e^{-z})\frac{e^{-M}}{e-1}\,.$$

Это неравенство верно для всех $z \in [0,1]$ при достаточно большом M. Правая часть стремится к нулю при $M \to \infty$, что доказывает первое утверждение леммы.

Далее,

$$\int_{\mathbb{T}^n\times[0,1]} |\Psi^{(n)}_{\gamma,k}|^2\,du\,dz \leqslant \int_{\mathscr{C}^{n+1}} |\Psi^{(n)}_{\gamma,k}|^2\,du\,dz = \operatorname{area}(\mathbb{T}^n)\int_{\mathbb{R}} |F_{\gamma,k}(z+n)|^2\,dz$$
$$= \operatorname{area}(\mathbb{T}^n)\cdot\|F_{\gamma,k}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} < \infty.$$

Из первых двух утверждений леммы следует, что

$$\widetilde{\Psi}_{\gamma,k} \in L_2(\mathbb{T}^n \times [0,1]).$$

Пространство $M_A^{n+1} = \mathscr{C}^{n+1}/\mathbb{Z}$ получается из $\mathbb{T}^n \times [0,1]$ отождествлением граничных торов посредством автоморфизма, задаваемого матрицей $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$. Поэтому

$$\int_{M_A^{n+1}} |\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}|^2 \leqslant \int_{\mathbb{T}^n \times [0,1]} |\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}|^2,$$

что завершает доказательство леммы 4.

Из лемм 3, 4 и равенства $\Delta\Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z) = \mathscr{E}_{\gamma,k}\Psi^{(n)}_{\gamma,k}(u,z)$ следует, что оператор Бельтрами–Лапласа можно переставлять с операцией суммирования.

Таким образом, цепочка равенств (8) обоснована и переход от функций $\Psi_{\gamma,k}$ на цилиндре к функциям $\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}$ на факторе $M_A^{n+1} = \mathscr{C}^{n+1}/\mathbb{Z}$ корректен.

Итак, каждому элементу $\gamma \in \Gamma^* \setminus \{0\}$ двойственной решетки тора $\mathbb{T}^n$ мы сопоставили серию собственных значений и "настоящих" собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа на пространстве $L_2(M_A^{n+1})$:

$$\gamma \mapsto (\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z), \mathscr{E}_{\gamma,k}),$$
$$\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i\langle\gamma, A^n u\rangle} F_{\gamma,k}(z+n).$$

Рассмотрим теперь естественное действие циклической подгруппы $\{A^*\} \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ на Γ^*. Через $[\gamma]$ обозначим орбиту этого действия:

$$[\gamma] = \{(A^*)^n\gamma : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Лемма 5. *Если точки решетки $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^* \setminus \{0\}$ принадлежат одной орбите действия $\{A^*\} : \Gamma^*$, то соответствующие им собственные значения и собственные функции совпадают.*

Доказательство. Поскольку γ_1, γ_2 лежат на одной орбите, то существует $N \in \mathbb{Z}$ такое, что $\gamma_2 = (A^*)^N\gamma_1$. Тогда

$$\widetilde{\Psi}_{\gamma_2,k}(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{(A^*)^N\gamma_1,k}(A^n u, z+n).$$

Лемма 6. *Выполняется равенство $\Psi_{A^*\gamma,k}(u,z) = \Psi_{\gamma,k}(Au, z+1)$.*

Доказательство. Имеем

$$\Psi_{A^*\gamma,k}(u,z) = e^{2\pi i\langle A^*\gamma, u\rangle} F_{A^*\gamma,k}(z) = e^{2\pi i\langle\gamma, Au\rangle} F_{A^*\gamma,k}(z).$$

Функция $F_{A^*\gamma,k}$ является k-м решением одномерного уравнения Шрёдингера с потенциалом $Q_{A^*\gamma}$,

$$\begin{aligned} Q_{A^*\gamma}(z) &= (2\pi)^2 g^{ij}(z)\langle A^*\gamma, f_i\rangle\langle A^*\gamma, f_j\rangle \\ &= (2\pi)^2 \big(\langle A^*\gamma, f_1\rangle, \dots, \langle A^*\gamma, f_n\rangle\big) \cdot G^{-1}(z) \cdot \big(\langle A^*\gamma, f_1\rangle, \dots, \langle A^*\gamma, f_n\rangle\big)^T \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^2 \big(\langle\gamma, Af_1\rangle, \dots, \langle\gamma, Af_n\rangle\big) \cdot G^{-1}(z) \cdot \big(\langle\gamma, Af_1\rangle, \dots, \langle\gamma, Af_n\rangle\big)^T \\
&= (2\pi)^2 \big(\langle\gamma, f_1\rangle, \dots, \langle\gamma, f_n\rangle\big) \cdot AG^{-1}(z)A^T \cdot \big(\langle\gamma, f_1\rangle, \dots, \langle\gamma, f_n\rangle\big)^T \\
&= (2\pi)^2 \big(\langle\gamma, f_1\rangle, \dots, \langle\gamma, f_n\rangle\big) \cdot G^{-1}(z+1) \cdot \big(\langle\gamma, f_1\rangle, \dots, \langle\gamma, f_n\rangle\big)^T \\
&= (2\pi)^2 g^{ij}(z+1)\langle\gamma, f_i\rangle\langle\gamma, f_j\rangle = Q_\gamma(z+1).
\end{aligned}
$$

Таким образом, функция $F_{A^*\gamma,k}(z)$ является k-м решением одномерного уравнения Шрёдингера с потенциалом $Q_{A^*\gamma}(z) = Q_\gamma(z+1)$. Следовательно,

$$F_{A^*\gamma,k}(z) = F_{\gamma,k}(z+1).$$

Окончательно получаем:

$$\Psi_{A^*\gamma,k}(u,z) = e^{2\pi i\langle\gamma, Au\rangle} F_{\gamma,k}(z+1) = \Psi_{\gamma,k}(Au, z+1).$$

Лемма 6 доказана.

Используя лемму 6, получаем:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}_{\gamma_2,k}(u,z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{(A^*)^N\gamma_1,k}(A^n u, z+n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma_1,k}(A^{n+N}u, z+n+N) = \widetilde{\Psi}_{\gamma_1,k}(u,z).
\end{aligned}
$$

Лемма 5 доказана.

Таким образом, собственные функции и собственные значения оператора Бельтрами–Лапласа параметризуются не точками двойственной решетки, а целыми орбитами:

$$
\begin{gathered}
[\gamma] \mapsto (\Psi_{[\gamma],k}, \mathscr{E}_{[\gamma],k}), \\
\Psi_{[\gamma],k} := \widetilde{\Psi}_{\gamma,k}.
\end{gathered}
$$

Рассмотрим отдельно случай $\gamma = 0$. Одномерное уравнение Шрёдингера (5) принимает совсем простой вид:

$$\frac{d^2F(z)}{dz^2} + \mathscr{E}F(z) = 0.$$

Поэтому при $\gamma = 0$ получаем следующий набор собственных функций и собственных значений:

$$(1,0), \quad (\cos k\pi z, (\pi k)^2), \quad (\sin k\pi z, (\pi k)^2).$$

Теорема 1. *Набор функций* $\{\Psi_{[\gamma],k} : \gamma \in \Gamma^* \setminus \{0\}\} \cup \{1,\ \cos k\pi z,\ \sin k\pi z\}$, *где* $k \in \mathbb{N}$, *образует собственный базис оператора Бельтрами–Лапласа в пространстве* $L_2(M_A^{n+1})$. *При этом функции* $\Psi_{[\gamma],k}$ *отвечает собственное значение* $\mathscr{E}_{[\gamma],k}$, *являющееся собственным значением оператора Шрёдингера на прямой с потенциалом* $Q_\gamma(z)$ (6).

Доказательство. Ортогональность и независимость этих функций очевидна. Нам остается проверить, что указанный набор функций является полным в $L_2(M_A^{n+1})$.

Известно [7], [8], что если M – компактное риманово многообразие, то в $L_2(M)$ существует ортонормированный базис, состоящий из бесконечно дифференцируемых собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа (это следует из эллиптичности оператора). Поэтому для доказательства полноты достаточно показать, что если гладкая функция $\Phi \in L^2(M_A^{n+1})$ ортогональна всем функциям из нашего набора, то она на самом деле тождественно равна нулю [9].

Аналогично случаю окружности $S^1 = \mathbb{T}^1$ система функций

$$\{\varphi_\gamma(u) = e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} : \gamma \in \Gamma^*\}$$

образует полный ортогональный набор в $L_2(\mathbb{T}^n)$, $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$ [9]. Поэтому каждый элемент $\Phi \in L_2(M_A^{n+1})$ можно представить в виде ряда

$$\Phi(u,z) = \sum_{\gamma\in\Gamma^*} e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} c_\gamma(z).$$

Это ряд Фурье функции Φ по ортогональной системе $\{\varphi_\gamma\}$. Коэффициенты Фурье c_γ определяются формулой

$$c_\gamma(z) = \frac{1}{\|\varphi_\gamma\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}} \int_{\mathbb{T}^n} \Phi(u,z)\overline{\varphi_\gamma(u)}\,d\mu.$$

Без ограничения общности мы можем рассмотреть Φ как функцию на цилиндре $\mathscr{C}^{n+1}$. Тогда c_γ будет некоторой гладкой функцией на прямой.

Лемма 7. *Если $\gamma \neq 0$, то $c_\gamma \in L_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Так как $\Phi \in L^2(M_A^{n+1})$, то $\Phi(Au, z+1) = \Phi(u,z)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma^*} e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} c_\gamma(z) &= \sum_{\gamma\in\Gamma^*} e^{2\pi i\langle\gamma,Au\rangle} c_\gamma(z+1) = \sum_{\gamma\in\Gamma^*} e^{2\pi i\langle A^*\gamma,u\rangle} c_\gamma(z+1)\\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma^*} e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} c_{(A^*)^{-1}\gamma}(z+1).\end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты Фурье удовлетворяют следующему условию:

$$c_\gamma(z+1) = c_{A^*\gamma}(z),$$

или в более общем виде

$$c_\gamma(z+n) = c_{(A^*)^n\gamma}(z), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $\gamma \neq 0$, то из гиперболичности матрицы A следует, что $(A^*)^n\gamma \to \infty$ при $n \to \pm\infty$. Хорошо известно, что коэффициенты Фурье тем быстрее стремятся к нулю, чем лучше дифференциальные свойства рассматриваемой функции.

В частности, если некоторая функция имеет k производных, то ее коэффициенты Фурье c_n удовлетворяют оценке $c_n = o(1/|n|^k)$ при $n \to \pm\infty$ [10]. Поэтому в нашем случае будем иметь

$$c_{(A^*)^n\gamma}(z) = o\biggl(\frac{1}{|(A^*)^n\gamma|^k}\biggr) = o\biggl(\frac{1}{(\Lambda^n)^k}\biggr), \qquad n \to \pm\infty,$$

где Λ – максимальное собственное значение матрицы A. В силу гиперболичности $\Lambda > 1$. Из этой оценки и предыдущего равенства следует, что коэффициенты c_γ стремятся к нулю на бесконечности достаточно быстро для того, чтобы принадлежать $L_2(\mathbb{R})$. Лемма 7 доказана.

Пусть теперь Φ ортогональна всем функциям $\Psi_{[\gamma_0],k}$, $\gamma_0 \in \Gamma^* \setminus \{0\}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \Phi, \Psi_{[\gamma_0],k}\rangle_{L^2(M_A^{n+1})} = \int_{M_A^{n+1}} \Phi(u,z)\overline{\Psi}_{[\gamma_0],k}(u,z)\,d\sigma \\
&= \int_{M_A^{n+1}} \sum_{\gamma\in\Gamma^*} e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} c_\gamma(z) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i\langle(A^*)^n\gamma_0,u\rangle}\overline{F}_{(A^*)^n\gamma_0,k}(z)\,d\sigma \\
&= \int_0^1 \sum_{\gamma\in\Gamma^*, n\in\mathbb{Z}} \biggl(\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i\langle\gamma,u\rangle} e^{-2\pi i\langle(A^*)^n\gamma_0,u\rangle}\,d\mu\biggr) c_\gamma(z)\overline{F}_{(A^*)^n\gamma_0,k}(z)\,dz \\
&= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \biggl(\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i\langle(A^*)^n\gamma_0,u\rangle} e^{-2\pi i\langle(A^*)^n\gamma_0,u\rangle}\,d\mu\biggr) c_{(A^*)^n\gamma_0}(z)\overline{F}_{(A^*)^n\gamma_0,k}(z)\,dz \\
&= \operatorname{area}(\mathbb{T}^n) \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{(A^*)^n\gamma_0}(z)\overline{F}_{(A^*)^n\gamma_0,k}(z)\,dz \\
&= \operatorname{area}(\mathbb{T}^n) \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{\gamma_0}(z+n)\overline{F}_{\gamma_0,k}(z+n)\,dz \\
&= \operatorname{area}(\mathbb{T}^n) \int_{\mathbb{R}} c_{\gamma_0}(z)\overline{F}_{\gamma_0,k}(z)\,dz = \operatorname{area}(\mathbb{T}^n)\cdot\langle c_{\gamma_0}, F_{\gamma_0,k}\rangle_{L_2(R)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент Фурье c_{γ_0} принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ при $\gamma_0 \ne 0$ и ортогонален ко всем функциям $F_{\gamma_0,k}$, которые образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$. Следовательно, $c_{\gamma_0} \equiv 0$ для $\gamma_0 \ne 0$. Поэтому функция Φ имеет вид $\Phi(u,z) = c_0(z)$, где c_0 – 1-периодическая функция. Теперь, пользуясь тем, что Φ ортогональна ко всем функциям $\cos k\pi z$, $\sin k\pi z$, $k \in \mathbb{N}$, которые образуют полный набор в $L_2(S^1)$, получаем, что и $c_0 \equiv 0$. Полнота, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Автор благодарит своих научных руководителей А. Т. Фоменко и А. В. Болсинова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] M. Kac, “Can one hear the shape of a drum?”, *Amer. Math. Monthly*, **73** (1966), 1–23.

[2] P. Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Progr. Math., **106**, Birkhäuser, Boston, MA, 1992.

[3] А. В. Болсинов, И. А. Тайманов, “Интегрируемые геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов”, *Динамические системы, автоматы и бесконечные группы*, Тр. МИАН, **231**, Наука, М., 2000, 46–63.

[4] A. V. Bolsinov, H. R. Dullin, A. P. Veselov, “Spectra of Sol-manifolds: arithmetic and quantum monodromy”, *Comm. Math. Phys.*, **264**:3 (2006), 583–611; `arXiv: math-ph/0503046`.

[5] Ф. А. Березин, М. А. Шубин, *Уравнение Шрёдингера*, МГУ, М., 1983.

[6] З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, Физматлит, М., 1985.

[7] А. Бессе, *Многообразия с замкнутыми геодезическими*, Мир, М., 1981.

[8] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

[9] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Физматлит, М., 1976.

[10] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.

К. М. Зуев (K. M. Zuev)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: `konstantin.zuev@mail.ru`

Поступила в редакцию
31.01.2006