УДК 517.9

Об одном случае интегрируемости геодезического потока на однородном многообразии

К.М. Зуев

Коммутативная интегрируемость. Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие с канонической пуассоновой структурой. Рассмотрим гамильтоновы уравнения

$$\dot{x} = \{x, H\}_M,\ H : M^{2n} \to \mathbb{R}$$

Обычно коммутативную интегрируемость определяют следующим образом.

Определение. Гамильтоновы уравнения $\dot{x} = \{x, H\}_M$ интегрируемы в коммутативном смысле (вполне интегрируемы), если существует семейство гладких функций $f_1, \ldots, f_n$ на M^{2n}, таких, что

1) $\{f_i, H\} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, т.е. функции f_i являются интегралами гамильтоновой системы;

2) $\{f_i, f_j\} = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$, то есть функции f_i коммутируют в смысле скобки Пуассона;

3) функции $f_1, \ldots, f_n$ функционально независимы, т.е. дифференциалы df_i линейно независимы на открытом всюду плотном подмножестве M^{2n}.

Легко видеть, что в этом случае семейство $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ образует коммутативную алгебру Ли относительно скобки $\{\cdot, \cdot\}_M$. Алгебра $\mathcal{F}$ называется полной коммутативной алгеброй первых интегралов на M, полной в том смысле, что она содержит максимально возможное число функционально независимых коммутирующих функций.

Геометрия вполне интегрируемых систем описывается следующей теоремой Лиувилля.

Теорема. *Если гамильтонова система $\dot{x} = \{x, H\}_M$ интегрируема в коммутативном смысле и $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — ее полная коммутативная алгебра интегралов, то каждая связная компактная компонента регулярной совместной поверхности уровня интегралов $\{f_1 = c_1, \ldots, f_n = c_n\}$ диффеоморфна n-мерному инвариантному тору $\mathbb{T}^n$ с линейной динамикой.*

Некоммутативная интегрируемость. Достаточно часто возникает ситуация, когда система обладает избыточным набором первых интегралов, которые уже не коммутируют между собой. С задачами такого рода призвана бороться теория некоммутативной интегрируемости, которая была разработана А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко [1]. Ее суть состоит в следующем.

Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — первые интегралы гамильтоновой системы $\dot{x} = \mathrm{sgrad} H$. Линейные комбинации первых интегралов и их попарные скобки Пуассона снова являются первыми интегралами системы. Поэтому мы можем считать, добавляя по необходимости функции, что пространство $\mathcal{F}$ первых интегралов системы является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона. Пусть $F_x \subset T_x^* M$ — подпространство, порожденное дифференциалами функций $f \in \mathcal{F}$, а $K_x \subset F_x$ — ядро ограничения пуассоновой структуры на F_x. Предположим, что

$$\mathrm{dim} F_x = \dim \mathrm{span}\{df(x), f \in \mathcal{F}\} = \mathrm{k} \ , \quad x \in U;$$

$$\mathrm{dim} K_x = \dim \ker\{\cdot, \cdot\}|_{F_x} = \mathrm{d} \ , \quad x \in U$$

почти всюду на M. Пусть $\phi : M^{2n} \to \mathbb{R}^k$ — отображение момента:

$$\phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)), \ \Sigma = \phi\,(M \setminus U).$$

Число k называют дифференциальной размерностью алгебры интегралов $\mathcal{F}$ (количество функционально независимых интегралов), а d — ее дифференциальным индексом (характеризует степень коммутативности $\mathcal{F}$). Они соответственно обозначаются через $\mathrm{ddim}\,\mathcal{F}$ и $\mathrm{dind}\,\mathcal{F}$.

Определение. Алгебра интегралов $\mathcal{F}$ называется полной, если

$$\mathrm{ddim}\,\mathcal{F} + \mathrm{dind}\,\mathcal{F} = \dim \mathrm{M}.$$

Определение. Говорят, что гамильтонова система вполне интегрируема в некоммутативном смысле, если она обладает полной алгеброй первых интегралов.

Если алгебра $\mathcal{F}$ коммутативна, то $\mathrm{ddim}\,\mathcal{F} = \mathrm{dind}\,\mathcal{F} = n$ и мы получаем классическую лиувиллеву интегрируемость. Оказывается, что если система интегрируема в некоммутативном смысле, то имеется аналог теоремы Лиувилля (который на самом деле является существенным усилением классической теоремы).

Теорема [1, 2]. *Предположим, что* $\mathrm{ddim}\,\mathcal{F} + \mathrm{dind}\,\mathcal{F} = \dim M$ *при* $x \in U$. *Пусть* $c \in \phi(M) \setminus \Sigma$ *— регулярное значение отображения момента, тогда*

1) $M_c = \phi^{-1}(c)$ *является изотропным подмногообразием* M *и гамильтоновы уравнения на* M_c *могут быть (локально) разрешены в квадратурах;*

2) компактная связная компонента M_c *диффеоморфна* d*-мерному тору* $\mathbb{T}^d$*;*

3) в окрестности $\mathbb{T}^d$ существуют обобщенные координаты действие-угол $y, x, I, \varphi \pmod{2\pi}$, такие, что симплектическая форма имеет в них следующий вид:

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} dI_i \wedge d\varphi_i + \sum_{i=1}^{n-d} dy_i \wedge dx_i;$$

4) гамильтониан зависит только от координат действия $H = H(I_1, \ldots, I_d)$;

5) инвариантные торы будут совместными поверхностями уровня координат I, y, x и гамильтоновы уравнения на инвариантных торах примут линейный вид:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1}, \ldots, \dot{\varphi}_d = \frac{\partial H}{\partial I_d}.$$

На самом деле эта теорема существенно сильнее классической теоремы Лиувилля: в предположениях теоремы о некоммутативном интегрировании гамильтоновы уравнения интегрируемы в обычном коммутативном смысле.

Теорема [3]. *В предположениях предыдущей теоремы гамильтоновы уравнения $\dot{x} = \{x, H\}$ интегрируемы в коммутативном смысле, т.е. существует n гладких коммутирующих интегралов $g_1, \ldots, g_n$, функционально независимых на открытом всюду плотном подмножестве M^{2n}.*

Из этой теоремы следует, что d-мерные инвариантные торы $\mathbb{T}^d$ могут быть организованы в торы большей размерности $\mathbb{T}^n$, которые являются совместными поверхностями уровня коммутирующих интегралов. Таким образом, торы $\mathbb{T}^n$ расслоены на торы $\mathbb{T}^d$; отсюда следует, что траектории соответствующей динамической системы не являются всюду плотными на торах $\mathbb{T}^n$. В этом смысле система является вырожденной.

Итак, установление факта некоммутативной интегрируемости системы дает нам больше информации о поведении ее интегральных траекторий по сравнению с классической теоремой Лиувилля.

Гипотеза [1]. Все некоммутативно интегрируемые системы интегрируемы и в коммутативном смысле с помощью алгебры интегралов того же функционального класса, что и исходная некоммутативная алгебра.

Из последней теоремы следует, что в работе [3] эта гипотеза доказана для гладкого класса (C^∞) интегралов. Поэтому некоммутативную интегрируемость иногда называют суперинтегрируемостью.

Геодезические потоки. Пусть (M, g) — риманово многообразие и $Q = T^*M$ — его кокасательное расслоение с естественной симплектической структурой. Возьмем в качестве гамильтониана $H(p, q) = \frac{1}{2} g_q^{-1}(p\,, p)$, где $p \in T_q^*M$, тогда гамильтоновы уравнения на Q превратятся в уравнения геодезического потока метрики g на M.

Вообще говоря, геодезический поток произвольной метрики неинтегрируем. В работе [4] доказано, что геодезический поток биинвариантной метрики на любом однородном пространстве $M = G/H$ компактной группы Ли G интегрируем в некоммутативном смысле. Опишем соответствующую конструкцию.

Пусть G — компактная группа Ли, H — связная подгруппа, $M = G/H$ — однородное пространство, $\mathfrak{g} = T_eG$ и $\mathfrak{h} = T_eH$ — алгебры Ли групп G и H соответственно. Возьмем на G биинвариантную метрику. Она индуцирует в $\mathfrak{g}$ невырожденное Ad_G-инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ — ортогональное разложение алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Отождествим $\mathfrak{v}$ с касательным пространством $T_{\pi(e)}M$, где $\pi : G \to M$ — каноническая проекция. Теперь ограничивая $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{v}$ и разнося его по M, получаем биинвариантную метрику ds_0^2 на однородном пространстве. При помощи $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ и ds_0^2 отождествим $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$ и T^*M с TM.

Пусть $\phi : TM \to \mathfrak{g}$, $\phi(gv) = Ad_g v$ — отображение момента G-действия на M, где через gv обозначено действие элемента $g \in G$ на элемент $v \in \mathfrak{v} = T_{\pi(e)}M$. Через $\mathbb{R}[\mathfrak{g}]$ и $\mathbb{R}[\mathfrak{v}]^H$ обозначим алгебру полиномов на $\mathfrak{g}$ и алгебру Ad_H-инвариантных полиномов на $\mathfrak{v}$. Тогда следующие два класса функций на TM будут интегралами потока ds_0^2:

$$\mathcal{F}_1 = \phi^*\mathbb{R}[\mathfrak{g}] = \{p = h \circ \phi,\ h \in \mathbb{R}[\mathfrak{g}]\}, \mathcal{F}_2 = \{G\text{−инвариантные полиномы на} TM\}.$$

Заметим, что функции из этих классов коммутируют: $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}_{TM} = 0$. Семейство $\mathcal{F}_2$ находится во взаимно однозначном соответствии с полиномами из $\mathbb{R}[\mathfrak{v}]^H$ (биекция задается так: $p(v) \leftrightarrow f_p(gv)$). Пусть

$$\tau_1 : \mathbb{R}[\mathfrak{g}] \to \mathcal{F}_1,\ \ \tau_1(p) = p \circ \phi,\ \ \tau_2 : \mathbb{R}[\mathfrak{v}]^H \to \mathcal{F}_2,\ \ \tau_2(p) = f_p$$

На $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{v}$ определим скобки Пуассона:

$$\{f(x), g(x)\}_{\mathfrak{g}} = \langle x, [\bigtriangledown f(x), \bigtriangledown g(x)]\rangle,\ \ \{f(v), g(v)\}_{\mathfrak{v}} = \langle v, [\bigtriangledown f(v), \bigtriangledown g(v)]\rangle$$

Теперь все готово для того, чтобы сформулировать следующий результат.

Теорема [4].
1. *Геодезический поток биинвариантной метрики ds_0^2 на однородном пространстве M вполне интегрируем в некоммутативном смысле, $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ является полной алгеброй интегралов.*
2. *Если выполнены следующие условия:*

(i) $\mathcal{A}$ — полная коммутативная алгебра на Ad_G-орбитиах $O_G(v)$ для $v \in \mathfrak{v}$ общего положения,

(ii) $\mathcal{B}$ — полная коммутативная подалгебра $\mathbb{R}[\mathfrak{v}]^H$,
то $\tau_1(\mathcal{A})+\tau_2(\mathcal{B})$ — полная коммутативная алгебра интегралов на TM.

Существует хорошо известная конструкция, называемая методом сдвига аргумента [5], позволяющая строить полные коммутативные семейства полиномов на произвольной орбите компактной группы Ли. Поэтому для построения полной коммутативной алгебры интегралов на TM нужно найти полную коммутативную подалгебру $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}[\mathfrak{v}]^G$. Отсюда возникает следующее определение.

Определение. Пара (G, H) называется интегрируемой, если существует $\mathcal{B}$ – полная коммутативная алгебра Ad_H- инвариантных полиномов на $\mathfrak{v}$ (т.е. такая, какая требуется в пункте (ii) теоремы).

В этих терминах гипотеза Мищенко – Фоменко звучит так : все пары (G, H) интегрируемы.

Интегрируемость пары $(SU(n), S(U(k_1) \times U(k_2) \times U(k_3)))$**.** Рассмотрим однородное пространство $SU(n)/S(U(k_1) \times U(k_2) \times U(k_3))$. Из предыдущей теоремы следует, что поток биинвариантной метрики на M интегрируем в некоммутативном смысле. Открытым остается вопрос об интегрируемости соответствующей пары.

Теорема. *Пара $(SU(n), S(U(k_1) \times U(k_2) \times U(k_3)))$ интегрируема при $k_i \leq [n/2]$.*

А.В. Болсинов предложил рассмотреть следующее семейство полиномов на $\mathfrak{v}$:

$$\mathcal{B} = \{p_\lambda(v) = p(v_1 + \lambda v_2),\ \ p \in \mathbb{R}[\mathfrak{g}]^G,\ \lambda \in \mathbb{R}\},$$

где $v = v_1 + v_2$, а элементы v_1 и v_2 имеют вид

$$v_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & V & 0 \\ \hline V^* & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad v_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & U_1 \\ \hline 0 & 0 & U_2 \\ \hline U_1^* & U_2^* & 0 \end{array}\right).$$

где

$$A^* = -\bar{A}^T.$$

Легко проверить, что $\mathcal{B}$ — подалгебра в $\mathbb{R}[\mathfrak{v}]^H$.

Чтобы доказать теорему, необходимо проверить следующие два утверждения: $\mathcal{B}$ — коммутативна и $\mathcal{B}$ — полна в $\mathbb{R}[\mathfrak{v}]^H$.

Коммутативность набора $\mathcal{B}$ легко доказывается при помощи обобщенного метода цепочек подалгебр, который описан в [6].

Полноту $\mathcal{B}$ в $\mathbb{R}[\mathfrak{v}]^H$ можно доказать с помощью критерия полноты Болсинова [7]. Этот критерий сводит задачу к проверке равенства рангов некоторых кососимметрических форм. Проверка осуществляется посредством прямых вычислений.

Автор благодарит своих научных руководителей А.Т. Фоменко и А.В. Болсинова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прилож. 1978. **12**. N.2 46-56.
2. *Нехорошев Н.Н.* О переменных действие-угол и их обобщения // Тр. ММО. 1972. **26**. 181-198.
3. *Bolsinov A.V., Jovanovic B.* Integrability, moment map and geodesic flows // Preprintserie der Mathematischen Fakultat, Universitat Freiburg. 2001. N.01-09.
4. *Болсинов А.В., Йованович Б.* Интегрируемые геодезические потоки на однородных пространствах // Матем. сб. 2001. **192**, N.7. 21-40.
5. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Уравнение Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН. СССР. Сер. матем. 1978. **42**. N.2. 396-415.
6. *Микитюк И.В.* Интегртруемость уравнений Эйлера, ассоциированных с фильтрациями полупростых алгебр Ли // Матем. сб. 1984. **125**(**167**). No.4. 539-547.
7. *Болсинов А.В.* Согласованные пуассоновы структуры на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции // Изв. АН. СССР. сер. матем. 1984. **55**. N.1. 69-89.